НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 10.
Геодезические. 12.04.2010.

Задача 1. Пусть X такое векторное поле, что $\nabla_X X = 0$. Доказать, что любая интегральная кривая[1] векторного поля X является геодезической.

Задача 2. Построить пример такого риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_A M \longrightarrow M$ не является a) сюръективным, b) инъективным.

Заметим, что если M не связно, то экспоненциальное отображение очевидно не сюръективно. Поэтому в пункте a) интересно придумать пример со связным многообразием M.

Задача 3. Докажите, что в геодезических координатах, центрированных в точке p, символы Кристоффеля в точке p обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Задача 4. Докажите, что центрированные в точке p координаты $x^1, \ldots, x^n$, определённые в окрестности U, являются геодезическими координатами, центрированными в точке p, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk} x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \ldots, x^n$ в U. *Указание. Обратите внимание на то, что в геодезических координатах, центрированных в точке p, геодезические, проходящие через точку p, имеют вид $x^i = a^i t$.*

Задача 5. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. *Указание. Найдите два интеграла исходной системы из двух дифференциальных уравнений второго порядка и используйте их для понижения порядка. Вы получите два уравнения, дающие $\dfrac{dx}{dt}$ и $\dfrac{dy}{dt}$. Выпишите тогда уравнение для $\dfrac{dy}{dx}$ и решите его.*

Задача 6. Докажите, что в полугеодезических координатах $x^1, \ldots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \mathrm{const}, \ldots, x^{n-1} = \mathrm{const}$ являются геодезическими с параметром $t = x^n$.

Задача 7. Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_p M \,|\, |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу. Как при помощи этого наблюдения ввести полугеодезические координаты в окрестности точки p?

[1] Для тех, кто забыл анализ на многообразиях, напомним, что интегральной кривой векторного поля X называется такая кривая, что в каждой её точке вектор скорости кривой равен значению векторного поля X в этой точке.