НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 11.
Геодезические (II). 19.04.2010.

Задача 1. Доказать, что поля Якоби инвариантны при аффинной замене параметра $\tilde{t} = at + b$ (как и геодезические).

Задача 2. Докажите, что геодезические в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) не имеют сопряженных точек.

Задача 3. Найдите явно якобиевы поля вдоль геодезических на сфере $\mathbb{S}^n$ в подходящем базисе векторных полей.

Задача 4. Докажите, что северный и южный полюс сферы $\mathbb{S}^n$ являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n-1$.

Задача 5. Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек.

Задача 6*. Докажите, что для многообразия положительной секционной кривизны $K \geqslant \mathrm{const} > 0$ существует такая постоянная T, что любая геодезическая, длина которой не меньше чем T, содержит пару точек, сопряжённых вдоль этой геодезической.