Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 3: Ростки функций.

3.1. Прямой предел

Определение 3.1. Коммутативная диаграмма векторных пространств есть направленный граф (граф со стрелочками), где каждой вершине соответствует векторное пространство, каждой стрелочке линейный гомоморфизм, причем если из A в B можно придти по стрелочкам двумя способами, композиции соответствующих стрелочек равны.

Замечание. Под "окрестностью" X всегда понимается открытое множество, содержащее X.

Задача 3.1. Пусть $(M, \mathcal{F})$ - пространство, окольцованное пучком функций, $x \in M$ точка, а $\{U_i\}$ – множество всех окрестностей x. Нарисуем диаграмму, где вершины соответствуют всем U_i, а стрелочки из U_i в U_j соответствуют вложениям $U_j \hookrightarrow U_i$. Докажите, что пространства сечений $\mathcal{F}(U_i)$ со стрелочками, которые соответствуют ограничениям функций, образуют коммутативную диаграмму.

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{C}$ - коммутативная диаграмма векторных пространств, A, B - векторные пространства, соответствующие двум вершинам диаграммы, а $a \in A, b \in B$ - элементы. Напишем $a \sim b$, если a и b переводятся в один и тот же элемент $d \in D$ композицией стрелочек из $\mathcal{C}$. Пусть $\sim$ - соотношение эквивалентности, порожденное такими $a \sim b$.

Задача 3.2.

а. $A \xrightarrow{\phi} B$ диаграмма из двух пространств, и одной стрелочки. Докажите, что $b \sim b'$ равносильно $b = b'$ для любых $b, b' \in B$.

б. Пусть $A \xrightarrow{\phi} B$, $A \longrightarrow 0$ - диаграмма из трех пространств, и двух стрелочек, одно из которых нулевое, а ϕ - вложение. Докажите, что для каждого $b, b' \in B$, $b \sim b'$ равносильно $b - b' \in \operatorname{im}\phi$.

Определение 3.3. Пусть $\{C_i\}$ - множество пространств, сопоставленных вершинам коммутативной диаграммы $\mathcal{C}$, а $E \subset \bigoplus_i C_i$ - подпространство, порожденное векторами вида $(x - y)$, где $x \sim y$. Фактор $\bigoplus_i C_i / E$ называется **прямым пределом** диаграммы $\{C_i\}$, и еще **индуктивным пределом**, и еще **копределом** и **колимитом**, и обозначается $\lim\limits_{\to}$.

Задача 3.3. Пусть дана диаграмма вида $C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow ...$, где все стрелочки инъективны. Докажите, что $\lim\limits_{\to} C_i$ это объединение всех C_i.

Задача 3.4. Пусть дана диаграмма вида $C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow ... \longrightarrow C_n$. Докажите, что $\lim\limits_{\to} C_i = C_n$.

Задача 3.5. Приведите пример диаграммы вида $C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow ...$ где все пространства C_i ненулевые, а копредел $\lim\limits_{\to} C_i$ нулевой.

Задача 3.6 (*). Приведите пример диаграммы вида $C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow ...$ где все пространства C_i ненулевые, все морфизмы тоже ненулевые, а копредел $\lim\limits_{\to} C_i$ нулевой.

Задача 3.7. Пусть $\mathcal{C}$ коммутативная диаграмма пространств C_i, причем на каждом C_i введена структура кольца, а все стрелки являются гомоморфизмами. Предположим также, что для любых двух вершин C_i, C_j диаграммы, найдутся стрелки диаграммы, ведущие из C_i, C_j в третью вершину C_k. Докажите, что $\lim\limits_{\to} C_i$ – тоже кольцо.

3.2. Кольцо ростков пучка функций

Определение 3.4. Пусть $M, \mathcal{F}$ - окольцованное пространство, $x \in M$ точка, а $\{U_i\}$ множество всех ее окрестностей. Рассмотрим коммутативную диаграмму, вершины которой пронумерованы $\{U_i\}$, а стрелочки U_i в U_j соответствуют вложениям $U_j \hookrightarrow U_i$ (в обратном направлении), каждой вершине U_i соответствует ее пространство сечений $\mathcal{F}(U_i)$, а стрелочкам - отображения ограничений. Прямой предел этой диаграммы называется **пространством ростков пучка $\mathcal{F}$ в точке** x.

Замечание. Поскольку гладкие функции, вещественно аналитические, непрерывные, C^i и так далее - пучки, кольца ростков гладких, вещественно аналитических и т. д. функций являются частными случаями вышеописанного.

Задача 3.8. Пусть на многообразии задан пучок функций, такой, что все его ростки равны нулю. Докажите, что это нулевой пучок.

Определение 3.5. Постоянный пучок $\mathbb{R}_M$ есть пучок функций, пространство сечений которого на каждом связном подмножестве $U \subset M$ равно $\mathbb{R}$.

Задача 3.9. Докажите, что кольцо ростков постоянного пучка в каждой точке равно $\mathbb{R}$.

Задача 3.10 (*). Пусть на многообразии M задан пучок $\mathbb{R}$-значных функций, такой, что все его ростки изоморфны $\mathbb{R}$. Докажите, что это постоянный пучок.

Определение 3.6. Идеал в кольце R есть такое подмножество $I \subsetneq R$, что для каждого $x \in R, a \in I$, произведение xa лежит в I.

Замечание. Факторпространство R/I тоже является кольцом (докажите это).

Определение 3.7. Максимальный идеал есть такой идеал $I \subset R$, что для любого другого идеала $I' \supset I$, имеем $I = I'$.

Задача 3.11 (!). Докажите, что любой идеал содержится в максимальном (воспользуйтесь леммой Цорна).

Задача 3.12 (!). Докажите, что идеал $I \subset R$ максимален тогда и только тогда, когда фактор R/I – поле.

Задача 3.13 (*). Найдите все максимальные идеалы в кольце гладких функций на компактном многообразии.

Определение 3.8. Кольцо называется **локальным**, если у него только один максимальный идеал.

Задача 3.14. Докажите, что кольцо рациональных чисел вида $\frac{m}{n}$, где m, n целые, а n нечетно, является локальным. Чему будет равен его фактор по максимальному идеалу?

Задача 3.15. Пусть F - кольцо рациональных функций (функций вида $\frac{P}{Q}$, где P и Q - полиномы), не имеющих полюса в нуле. Докажите, что это кольцо локально. Найдите фактор по максимальному идеалу.

Задача 3.16 (!). Являются ли следующие кольца локальными?

а. Кольцо ростков гладких функций.

б. Кольцо ростков полиномиальных функций на $\mathbb{R}^n$

в. Кольцо ростков функций класса C^i, $i > 0$.

г. Кольцо ростков непрерывных функций.

д. Кольцо ростков вещественно аналитических функций.

Задача 3.17. Докажите, что кольцо с максимальном идеалом I локально тогда и только тогда, когда каждый элемент, не принадлежащий I, обратим.

Определение 3.9. **Делители нуля** в кольце есть такие ненулевые элементы r_1, r_2, что произведение $r_1 r_2$ равно нулю. **Нильпотент** есть элемент $r \in R$ такой что $r^n = 0$ для какого-то n.

Задача 3.18. Определите, если ли в следующих кольцах делители нуля и нильпотенты.

а. Кольцо ростков гладких функций.

б. Кольцо ростков вещественно аналитических функций.

в. Кольцо ростков непрерывных функций.

Определение 3.10. Непрерывная функция f на $\mathbb{R}^n$ называется **кусочно полиномиальной**, если $\mathbb{R}^n$ разбито в объединение полиэдров, и на каждом из этих полиэдров f полиномиальна.

Задача 3.19 (*). Пусть $\mathcal{F}$ - пучок кусочно полиномиальных функций на $\mathbb{R}$, а R - кольцо его ростков над 0. Докажите, что $R = \mathbb{R}[t_1, t_2]/(t_1 t_2 = 0)$.

Задача 3.20 (!). Пусть R локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ его максимальный идеал, а $K(R) := \bigcap_i \mathfrak{m}^i$. Докажите, что это идеал. Выясните, нулевой ли это идеал для следующих локальных колец.

а. Кольцо ростков гладких функций.

б. Кольцо ростков вещественно аналитических функций.

в. Кольцо ростков непрерывных функций.

Задача 3.21 (*). Пусть R - кольцо полиномов над полем, а $I \subset R$ – идеал. Докажите, что $\bigcap_i I^i = 0$.

Задача 3.22. Пусть R - кольцо ростков гладких функций в точке x, а $K(R) := \bigcap_i \mathfrak{m}^i$ идеал, определенный выше. Докажите, что для любого элемента $f \in K(R)$, все производные от f в нуле (любого порядка) равны нулю.

Задача 3.23. Пусть $x_1, ..., x_n$ - координаты на $\mathbb{R}^n$, а f - функция, все производные которой в нуле зануляются. Докажите, что частное $\frac{f}{(\sum_i x_i^2)^p}$ непрерывно для любого $p > 0$.

Задача 3.24 (!). В условиях предыдущей задачи, докажите, что функция $\frac{f}{\sum_i x_i^2}$ гладкая.

Задача 3.25 (!). Пусть R - кольцо ростков гладких функций в точке x, а $K(R) := \bigcap_i \mathfrak{m}^i$ идеал, определенный выше. Докажите, что $K(R)$ - идеал функций, все производные которых в нуле равны нулю.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 3.26 (*). Будет ли кольцо $R/K(R)$ содержать делители нуля? Нильпотенты?

3.3. Мягкие пучки

Определение 3.11. Пусть $(M, \mathcal{F})$ - топологическое пространство, окольцованное пучком функций, а $X \subset M$ подмножество его. Рассмотрим диаграмму, проиндексированную открытыми подмножествами $U_i \subset M$, содержащими X, со стрелочками, которые соответствуют вложениям $U_j \subset U_i$, и повесим над каждым U_i пространство сечений $\mathcal{F}(U_i)$. Прямой предел по этой диаграмме называется **кольцо ростков $\mathcal{F}$ в X,** и обозначается $\mathcal{F}(X)$.

Задача 3.27. Докажите, что для любого открытого множества $U \subset M$, соответствующее пространство ростков над U совпадает с пространством сечений $\mathcal{F}(U)$

Задача 3.28 (*). $(M, C^\infty M)$ - многообразие, окольцованное пучком гладких функций, а $X \subset M$ - подмножество, такое, что кольцо ростков $C^\infty M$ в X локально. Докажите, что X это точка.

Определение 3.12. Пучок функций $\mathcal{F}$ на M называется **мягким**, если для любого замкнутого подмножества $X \subset M$, естественное отображение из пространства глобальных сечений $\mathcal{F}(M)$ в пространство ростков $\mathcal{F}(X)$ является наложением.

Задача 3.29. Докажите, что пучок вещественно аналитических функций не мягкий.

Задача 3.30. Докажите, что пучок полиномиальных функций на $\mathbb{R}^n$ не мягкий.

Задача 3.31. Докажите, что постоянный пучок на многообразии положительной размерности не мягкий.

Задача 3.32. Придумайте топологическое пространство M и пучок функций $\mathcal{F}$ на нем, такой, что отображение ограничения из $\mathcal{F}(M)$ на кольцо ростков $\mathcal{F}$ в точке всегда сюрьективно, но $\mathcal{F}$ не мягкий.

Задача 3.33 (!). Пусть M - многообразие со счетной базой, $N \subset M$ - замкнутое подмножество, а $U \supset N$ его окрестность. Докажите, что у M есть локально конечное покрытие $\{U_i\}$, такое, что все элементы покрытия, пересекающие N, содержатся в U.

Задача 3.34 (!). Докажите, что пучок гладких функций на многообразии мягкий.

Указание. Пусть дана гладкая функция f на $U \supset N$, возьмем покрытие $\{U_i\}$, $i \in I$ как в предыдущей задаче, и пусть $\{\psi_i\}$ – подчиненное ему разбиение единицы, а A - множество индексов $\alpha \in I$ таких, что $U_\alpha \cap N \neq 0$. Докажите, что функция $\sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha f$ равна нулю в окрестности границы U и гладко продолжается на M, и равна f на N.

Задача 3.35. Пусть $(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi} (M_1, \mathcal{F}_1)$ - морфизм окольцованных пространств, R_m - пространство ростков $\mathcal{F}$ в m, а $R_{\phi(m)}$ - пространство ростков $\mathcal{F}_1$ в $\phi(m)$. Для какой-то функции $f \in R_{\phi(m)}$, определенной на окрестности $U \supset \phi(m)$, рассмотрим ее прообраз $\phi \circ f$, определенный на $\phi^{-1}(U)$. Докажите, что $f \longrightarrow \phi \circ f$ задает гомоморфизм колец из R_m в $R_{\phi(m)}$.

Определение 3.13. Этот гомоморфизм называется **гомоморфизмом ростков, индуцированным** ϕ.

Задача 3.36 (*). Пусть M, M_1 многообразия, а $\phi: \ M \longrightarrow M_1$ непрерывное отображение, которое индуцирует гомоморфизм на ростках непрерывных функций, переводящий ростки гладких функций в ростки гладких функций. Докажите, что ϕ гладкое.

Задача 3.37 (!). Пусть M, M_1 многообразия, а $\phi: \ M \longrightarrow M_1$ непрерывное отображение, такое, что $\phi \circ f$ гладко на M для любой $f \in C^\infty M_1$. Докажите, что ϕ гладкое.

3.4. Нормальные пространства

Определение 3.14. Топологическое пространство M **нормально**, если у любых непересекающихся, замкнутых подмножеств $X, Y \subset M$, найдутся непересекающиеся окрестности $U \supset X$, $V \supset Y$.

Задача 3.38. Докажите, что любое метрическое пространство нормально.

Задача 3.39. Докажите, что любое компактное, хаусдорфово топологическое пространство нормально.

Задача 3.40 (*). Докажите, что любое локально компактное, хаусдорфово пространство со счетной базой нормально.[1]

Задача 3.41 (*). Пусть M - нормальное топологическое пространство. Докажите, что пучок непрерывных функций на M мягкий.

[1] Из этого следует, что любое многообразие со счетной базой нормально.

Задача 3.42 (!). Пусть M - нормальное гладкое многообразие. Докажите, что для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств $X, Y \subset M$ найдется гладкая функция на M, которая равна 1 на X и 0 на Y.