Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 4: Векторные поля и дифференцирования

4.1. Дифференцирования кольца

Замечание. Все кольца в этих листочках предполагаются коммутативными и с единицей. Алгебры над полем – ассоциативные, но не обязательно коммутативные (например, матричная алгебра).

Определение 4.1. Пусть R – кольцо над полем k. k-линейное отображение D из R в R называется **дифференцированием**, если выполнено **соотношение Лейбница** $D(fg) = D(f)g + gD(f)$. Пространство дифференцирований обозначается $\operatorname{Der}(R)$, или $\operatorname{Der}_k(R)$.

Задача 4.1. Докажите, что дифференцирования зануляются на элементах k.

Задача 4.2. Пусть D_1, D_2 - дифференцирования. Докажите, что коммутатор $[D_1, D_2] := D_1D_2 - D_2D_1$ это тоже дифференцирование.

Задача 4.3 (!). Пусть $[K : k]$ – конечное расширение поля нулевой характеристики. Найдите пространство $\operatorname{Der}_k(K)$

Задача 4.4 (*). Верно ли это, если $char\ k = p$?

Задача 4.5. Рассмотрим кольцо $k[\varepsilon]$, заданное соотношением $\varepsilon^2 = 0$. Найдите $\operatorname{Der}_k(k[\varepsilon])$.

Задача 4.6 (*). Найдите все кольца R над $\mathbb{C}$, такие, что R конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ и $\operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(R) = 0$.

Задача 4.7 (*). Пусть $D \in \operatorname{Der}_k(K)$ дифференцирование поля K над k, $\operatorname{char} k = 0$, а $[K' : K]$ конечное расширение полей. Докажите, что D можно продолжить до дифференцирования $D' \in \operatorname{Der}_k(K')$.

Задача 4.8. Пусть $D \in \operatorname{Der}_k(R)$ дифференцирование кольца, $I \subset R$ – идеал. Докажите, что $D(I^k) \subset I^{k-1}$.

4.2. Модули над кольцом

Определение 4.2. Пусть R – кольцо над полем k. **Модуль** над R есть векторное пространство V над k, снабженное гомоморфизмом алгебр $R \longrightarrow \operatorname{End}(V)$, где $\operatorname{End}(V)$ – алгебра эндоморфизмов V (т.е. матричная алгебра).

Задача 4.9. Пусть R это поле. Докажите, что модули над R это то же самое, что векторные пространства над R.

Замечание. R-модуль есть группа, на которой определена операция "умножения на элементы из R", причем выполнены те же самые аксиомы дистрибутивности и ассоциативности, что в определении векторного пространства.

Замечание. Подмодули, фактормодули, прямые суммы определяются обычным образом как для векторных пространств). Кольцо R является модулем над собой. **Свободный модуль** есть $R \oplus R \oplus ...$ (иногда такой модуль называется **тривиальным**). Прямая сумма n копий R обозначается R^n.

Замечание. R-подмодули в R это то же самое, что идеалы в R.

Определение 4.3. Кольцо R называется **кольцом главных идеалов**, если все ненулевые подмодули R изоморфны R.

Задача 4.10. Докажите, что R кольцо главных идеалов тогда и только тогда, когда у него нет делителей нуля, а все идеалы в R главные, то есть имеют вид Rx, для какого-то необратимого $x \in R$.

Задача 4.11. Являются ли следующие кольца кольцами главных идеалов?

а. $R = \mathbb{C}[t]$

б. [!] $R = \mathbb{C}[t_1, t_2]$

в. [*] $R := \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 = -1)$.

Определение 4.4. Конечно-порожденный модуль над R есть фактор-модуль R^n по какому-то подмодулю.

Задача 4.12. Придумайте конечно порожденный и несвободный модуль над кольцом $\mathbb{C}[t]$.

Определение 4.5. Нетерово кольцо есть кольцо, где все идеалы конечно порождены.

Задача 4.13 (*). Пусть R – нетерово кольцо. Докажите, что любой подмодуль конечно порожденного модуля над нетеровым кольцом конечно порожден.

Задача 4.14. Рассмотрим кольцо R, полученное как прямой предел следующей диаграммы. В вершинах этой диаграммы, пронумерованных натуральными числами, стоят кольца $\mathbb{C}[t]$. Стрелки $\phi_{k,km}$ этой диаграммы бьют из k-й вершины в km-ю, причем $\phi_{k,km}$ определяется однозначно из формулы $\phi_{k,km}(t) = t^m$. Докажите, что R изоморфно кольцу формальных выражений вида $a_1 t^{\alpha_1} + a_2 t^{\alpha_2} + ... + a_2 t^{\alpha_2}$ где $a_i \in \mathbb{C}$, а α_i – неотрицательные рациональные числа. Выпишите формулу для произведения и суммы в этом кольце.

Задача 4.15 (!). Рассмотрим кольцо R, определенное в прошлой задаче. Докажите, что идеал, порожденный полиномами вида $a_1 t^{\alpha_1} + a_2 t^{\alpha_2} + ... + a_2 t^{\alpha_2}$, где все α_i положительны, не конечно порожден.

Задача 4.16. Рассмотрим кольцо R ростков гладких функций в нуле, и пусть K – идеал всех функций, у которых все кратные производные в нуле зануляются. Докажите, что этот идеал не главный.

Задача 4.17 (*). Докажите, что K не конечно порожден.

Задача 4.18 (*). Пусть задан конечно порожденный идеал в кольце ростков гладких функций на $\mathbb{R}$. Всегда ли такой идеал – главный?

4.3. Векторные поля

Замечание. Пусть R – кольцо над полем k. Тогда $\operatorname{Der}_k(R)$ – модуль над кольцом R, структура R-модуля определяется формулой $rD(f) = rD(f)$.

Задача 4.19. Проверьте, что $\operatorname{Der}_k(R)$ – действительно R-модуль.

Задача 4.20. Пусть $R = k[t_1, .., t_k]$ – кольцо полиномов. Докажите, что $\operatorname{Der}_k(R)$ – свободный модуль, изоморфный R^n, с образующими $\frac{d}{dt_1}, \frac{d}{dt_2}, ..., \frac{d}{dt_n}$

Указание. Постройте отображение $\operatorname{Der}_k(R) \longrightarrow R^n$,

$$D \longrightarrow (D(t_1), d(t_2), ..., d(t_n))$$

и докажите, что это изоморфизм.

Задача 4.21 (*). Пусть $R = k(t_1, .., t_k)$ – поле рациональных функций, то есть функций вида $\frac{P}{Q}$ где P и Q полиномы, а $Q \neq 0$. Докажите, что $\operatorname{Der}_k(R)$ – свободный модуль, изоморфный R^n.

Определение 4.6. Возьмем в $\mathbb{R}^n$ координаты $t_1, ..., t_n$. Определим отображение

$$\operatorname{Der}(C^\infty\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\ \Pi\ } (C^\infty\mathbb{R}^n)^n,$$

$D \longrightarrow (D(t_1), D(t_2), ..., D(t_n))$.

Задача 4.22. Докажите, что Π – наложение.

Задача 4.23. Докажите, что $\Pi(D) = 0 \Leftrightarrow D(P) = 0$ для любого полинома $P(t_1, ..., t_n)$.

Задача 4.24. Обозначим за $\mathfrak{m}_x \subset C^\infty\mathbb{R}^n$ идеал всех функций, зануляющихся в $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что он максимальный.

Задача 4.25. Пусть $\mathbb{R}[[t_1, ..., t_n]]$ – кольцо формальных степенных рядов. Докажите, что оно локальное.

Задача 4.26 (!). Рассмотрим естественное отображение

$$C^\infty\mathbb{R}^n \xrightarrow{\ \Psi\ } \mathbb{R}[[t_1, ..., t_n]],$$

из кольца ростков гладких функций в $\mathbb{R}[[t_1, ..., t_n]]$, переводящее функцию в ее ряд Тэйлора в нуле. Обозначим за $\tilde{\mathfrak{m}}$ максимальный идеал в $\mathbb{R}[[t_1, ..., t_n]]$. Докажите, что $\Psi^{-1}(\tilde{\mathfrak{m}}^n) = \mathfrak{m}_0^n$.

Задача 4.27. Пусть $f(x) = 0$ и $f'(x) = 0$ для какой-то функции $f \in C^\infty\mathbb{R}^n$. Докажите, что $f \in \mathfrak{m}_x^2$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. Аффинная функция на $\mathbb{R}^n$ есть сумма линейной функции и константы. Довольно часто такие функции тоже называют линейными.

Задача 4.28. Пусть $f \in C^\infty\mathbb{R}^n$. Докажите, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ найдется аффинная функция l такая, что $f - l \in \mathfrak{m}_x^2$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 4.29. Пусть есть дифференцирование кольца $C^\infty\mathbb{R}^n$, причем $D \in \ker\Pi$. Докажите, что для каждой функции $f \in C^\infty\mathbb{R}^n$, каждого $x \in \mathbb{R}^n$, имеет место $D(f) \in \mathfrak{m}_x$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 4.30 (!). Докажите, что отображение

$$\operatorname{Der}(C^\infty\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\ \Pi\ } (C^\infty\mathbb{R}^n)^n$$

есть изоморфизм.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 4.31 (*). Найдите нетривиальный элемент $\gamma \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^0\mathbb{R})$ в пространстве дифференцирований кольца непрерывных функций, или докажите, что оно пусто

Задача 4.32 (*). Найдите нетривиальный элемент $\gamma \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^1\mathbb{R})$ в пространстве дифференцирований кольца функций класса C^1, или докажите, что оно пусто

4.4. Пучки модулей

Определение 4.7. Пусть M – топологическое пространство. **Пучок** $\mathcal{F}$ на M это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** – гомоморфизмами $\mathcal{F}(U) \stackrel{\phi_{U,U'}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(U')$, заданными для каждого $U' \subset U$, и удовлетворяющие следующим свойствам.

(а) Композиция ограничений – снова ограничение: если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а

$$\mathcal{F}(U_1) \stackrel{\phi_{U_1,U_2}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(U_2) \stackrel{\phi_{U_2,U_3}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(U_3)$$

соответствующие им отображения ограничений, то $\phi_{U_1,U_2} \circ \phi_{U_2,U_3} = \phi_{U_1,U_3}$.

(б) Если $U \subset M$ есть объединение открытых множеств $U_i \subset U$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(в) Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию

$$f_i\Big|_{U_i \cap U_j} = f_j\Big|_{U_i \cap U_j},$$

для любой пары элементов покрытия. Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над U**. Отображение ограничения na U часто обозначается $f \longrightarrow f\big|_U$

Замечание. Для пучка функций условия (а) и (б) выполняются автоматически.

Задача 4.33 (!). Докажите, что условия (б) и (в) равносильны точности такой последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i \neq j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

для любого набора $\{U_i\}$ открытых подмножеств таких, что $U = \bigcup U_i$.

Задача 4.34. Пусть $f, g \in C^\infty M$ – две функции, которые равны на открытом множестве $U \subset M$, а $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty M$ – дифференцирование. Докажите, что $D(f)\big|_U = D(g)\big|_U$.

Определение 4.8. Пусть $U \subset V$ – открытые подмножества в M. Мы пишем $U \Subset V$, если замыкание U содержится в V.

Задача 4.35. Пусть $U \Subset V$ – открытые подмножества в гладком многообразии M со счетной базой. Докажите, что найдется гладкая функция $\Phi_{U,V} \in C^\infty M$, равная 1 на U и 0 вне V.

Задача 4.36 (!). Пусть $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty M$ – дифференцирование, а $U \Subset V$ – открытые подмножества M. Для $f \in \mathbb{C}^\infty V$, определим $D(f)\big|_U$ формулой $D(f)\big|_U = D(\Phi_{U,V} \cdot f)$. Докажите, что $D(f)\big|_U$ удовлетворяет правилу Лейбница, не зависит от выбора $\Phi_{U,V}$, и продолжается до корректно определенного дифференцирования $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty V$

Задача 4.37 (!). Докажите, что $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$ – пучок модулей над $C^\infty M$.

Определение 4.9. Гомоморфизм пучков $\psi: \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ есть набор гомоморфизмов

$$\psi_U: \mathcal{F}_1(U) \longrightarrow \mathcal{F}_2(U),$$

заданных для каждого пространства сечений, и коммутирующих с ограничениями. **Изоморфизм пучков** есть гомоморфизм $\Psi: \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$, для которого существует обратный (справа и слева) гомоморфизм $\Phi: \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1$.

Задача 4.38. Пусть $\psi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ – гомоморфизм пучков.

а. Докажите, что $U \longrightarrow \ker \psi_U$ это снова пучок (он называется **ядром гомоморфизма** ψ).

б. [*] Докажите, что $U \longrightarrow coker\, \psi_U$ это не всегда пучок (приведите контрпример).

Определение 4.10. Пространство глобальных сечений пучка $\mathcal{F}$ на M это $\mathcal{F}(M)$.

Задача 4.39 (*). Постройте ненулевой пучок, у которого нулевое пространство глобальных сечений.

Замечание. Пусть $A: \phi \longrightarrow B$ – гомоморфизм колец, а V – B-модуль. Тогда на V есть естественная структура A-модуля, $av := \phi(a)v$.

Определение 4.11. Пусть $\mathcal{F}$ есть пучок функций, замкнутый относительно умножения, а $\mathcal{B}$ - пучок на топологическом пространстве M. Он называется **пучком $\mathcal{F}$-модулей**, если для каждого U, пространство сечений $\mathcal{B}(U)$ наделено структурой $\mathcal{F}(U)$-модуля, причем для каждого $U' \subset U$, отображение ограничения $\mathcal{B}(U) \stackrel{\phi_{U,U'}}{\longrightarrow} \mathcal{B}(U')$, задают гомоморфизм $\mathcal{F}(U)$-модулей (воспользуйтесь предыдущим замечанием, чтобы получить на $\mathcal{B}(U')$ структуру $\mathcal{F}(U)$-модуля).

Задача 4.40. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ – пучок функций и его подпучок (оба замкнуты относительно операции умножения, то есть являются пучками колец). Докажите, что $\mathcal{F}_1$ является пучком модулей над $\mathcal{F}$.

Определение 4.12. Пространство ростков пучка $\mathcal{F}$ в точке x есть предел $\varinjlim \mathcal{F}(U)$, где U пробегает все окрестности x.

Задача 4.41. Докажите, что пространство ростков пучка модулей над $\mathcal{F}$ в x есть модуль над кольцом ростков $\mathcal{F}$ в x.

Задача 4.42 (!). Пусть $\mathcal{B}$ есть пучок, все ростки которого равны нулю. Докажите, что $\mathcal{B} = 0$.

Задача 4.43 (*). Постройте пучок, у которого все ростки ненулевые, а пространство глобальных сечений нулевое.

Определение 4.13. Пучок модулей $\mathcal{B}$ над M называется **глобально порожденным**, если для любой точки $x \in M$, естественное отображение ограничения $\mathcal{B}(M) \longrightarrow \mathcal{B}_x$ на пространство ростков является наложением.

Задача 4.44 (*). Докажите, что каждый пучок модулей над пучком функций $C^\infty(M)$ глобально порожден, если M – многообразие со счетной базой.

Определение 4.14. Тривиальный пучок модулей $\mathcal{F}^n$ над пучком функций $\mathcal{F}$ сопоставляет каждому U пучок $\mathcal{F}^n(U)$.

Задача 4.45. Постройте нетривиальный подпучок модулей в $\mathcal{F}^n$ для какого-нибудь кольца функций $\mathcal{F}$.

Определение 4.15. Локально тривиальный пучок модулей над пучком функций $\mathcal{F}$ это такой пучок $\mathcal{B}$, что у каждой точки $x \in M$ найдется окрестность U такая, что ограничение $\mathcal{B}\big|_U$ тривиально.

Задача 4.46 (!). Докажите, что пучок $C^\infty M$-модулей $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$ локально тривиален, для любого многообразия M.

Задача 4.47. Докажите, что $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$ – тривиальный пучок для следующих многообразий

а. $M = \mathbb{R}$

б. $M = S^1$ (окружность)

в. [!] $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (тор)

г. [*] $M = S^3$ (трехмерная сфера).

Задача 4.48 (*). Постройте многообразие, у которого пучок $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$ нетривиален.

Определение 4.16. Векторное расслоение на окольцованном пространстве $(M, \mathcal{F})$ есть локально тривиальный пучок $\mathcal{F}$-модулей.

Определение 4.17. Пучок C^∞-модулей $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$ называется **касательным расслоением** к M.

Задача 4.49 (!). Пусть B – векторное расслоение на многообразии $(M, C^\infty M)$. Докажите, что пучок сечений B глобально порожден.

Задача 4.50 (*). Пусть B_1, B_2 – два векторных расслоения над M таких, что пространства сечений $B_1(M)$ и $B_2(M)$ изоморфны как $C^\infty(M)$-модули. Докажите, что B_1 и B_2 изоморфны.