

Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшем k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 6: Теорема Серра-Суона

6.1. Морфизмы векторных расслоений

Определение 6.1. Пусть $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ – пучки над M . **Морфизм** из \mathcal{B} в \mathcal{B}' есть гомоморфизм $\mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}'(U)$, заданный для каждого открытого множества $U \subset M$, и совместимый с гомоморфизмами ограничений:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(U) & \longrightarrow & \mathcal{B}'(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(U_1) & \longrightarrow & \mathcal{B}'(U_1) \end{array}$$

Замечание. Морфизмы пучков модулей определяются аналогично.

Определение 6.2. Морфизм пучков называется **инъективным**, если он инъективен на ростках, и **сюръективным**, если он сюръективен на ростках.

Задача 6.1. Пусть $\mathcal{B} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}'$ – инъективный морфизм пучков. Докажите, что ϕ инъективен на глобальных сечениях.

Задача 6.2 (*). Приведите пример сюръективного морфизма пучков, который не сюръективен на глобальных сечениях.

Определение 6.3. Пусть $\mathcal{B} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}'$ – морфизм локально тривиальных пучков $C^\infty M$ -модулей. Он называется **морфизмом расслоений**, если ϕ в каждом слое $\mathcal{B}|_x \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}'|_x$ имеет один и тот же ранг.

Задача 6.3 (!). Приведите пример инъективного морфизма локально тривиальных пучков $C^\infty M$ -модулей, который в каком-то слое не инъективен.

Задача 6.4 (*). Докажите, что сюръективный морфизм локально тривиальных пучков $C^\infty M$ -модулей является морфизмом векторных расслоений.

Задача 6.5 (!). Пусть $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_1$ – морфизм расслоений над M . Докажите, что соответствующее отображение тотальных пространств –

- неособый морфизм многообразий
- Докажите, что оно является гомоморфизмом относительных векторных пространств над M .

Задача 6.6 (*). Любой ли гомоморфизм относительных векторных пространств

$$\text{Tot } \mathcal{B} \rightarrow \text{Tot } \mathcal{B}_1$$

получается таким образом?

Определение 6.4. **Подрасслоением** называется образ инъективного морфизма расслоений.

Задача 6.7. Пусть $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ – подрасслоение. Докажите, что факторпучок $\mathcal{B}/\mathcal{B}_1$ – тоже расслоение.

Задача 6.8 (!). Пусть $\mathcal{B}_1 \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}_2$ – морфизм расслоений. Докажите, что образ ϕ – подрасслоение в \mathcal{B}_2 , а ядро – подрасслоение в \mathcal{B}_1 .

Определение 6.5. **Прямой суммой** расслоений называется прямая сумма соответствующих пучков.

Задача 6.9. Докажите, что тотальное пространство прямой суммы расслоений $\mathcal{B} \oplus \mathcal{B}'$ гомеоморфно $\text{Tot } \mathcal{B} \times_M \text{Tot } \mathcal{B}'$.

Задача 6.10 (!). Пусть \mathcal{B} - векторное расслоение, снабженное метрикой (то есть положительно определенной билинейной симметрической формой), а $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ - подрасслоение. Рассмотрим подмножество в $\text{Tot } \mathcal{B}_1^\perp \subset \text{Tot } \mathcal{B}$, состоящее из всех точек $v \in \mathcal{B}|_x$, ортогональных $\mathcal{B}_1|_x \subset \mathcal{B}|_x$. Докажите, что $\text{Tot } \mathcal{B}_1^\perp$ - тотальное пространство подрасслоения $\mathcal{B}_1^\perp \subset \mathcal{B}$.

Определение 6.6. Подрасслоение $\mathcal{B}_1^\perp \subset \mathcal{B}$ называется **ортогональным дополнением** \mathcal{B} к $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$.

Задача 6.11. Пусть $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ - подрасслоение. Докажите, что \mathcal{B} изоморфно прямой сумме \mathcal{B}_1 и еще одного расслоения.

Указание. Определите на \mathcal{B} метрику, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. В такой ситуации, говорят, что \mathcal{B}_1 является **прямым слагаемым** \mathcal{B} .

6.2. Касательное расслоение

Задача 6.12 (!). Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ - гладкое подмногообразие в \mathbb{R}^n , а $TM \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ - множество всех пар $(v, x) \in M \subset \mathbb{R}^n$, где $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ точка M , а $v \in \mathbb{R}^n$ - вектор, касательный к M в m , то есть удовлетворяющий условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(M, m + tv)}{t} \rightarrow 0.$$

- Докажите, что естественная аддитивная операция на $TM \subset M \times \mathbb{R}^n$ (сложение по второму аргументу) задает на TM структуру топологической группы над M .
- Докажите, что домножение второго аргумента на элемент \mathbb{R} задает на TM структуру относительного векторного пространства над M .
- Докажите, что TM будет тотальным пространством векторного расслоения.
- [!] Докажите, что это векторное расслоение изоморфно касательному расслоению, то есть пучку $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$.

Замечание. Касательное расслоение к M , а равно и его тотальное пространство, обозначается TM .

Задача 6.13 (!). Пусть M - многообразие со счетной базой. Докажите, что TM допускает вложение в тривиальное расслоение.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и примените теорему Уитни.

Задача 6.14 (!). Пусть \mathcal{B} - векторное расслоение на M , а $\text{Tot } \mathcal{B}$ - его тотальное пространство. Пусть $T \text{Tot } \mathcal{B}$ - касательное расслоение, а $M \xrightarrow{\phi} \text{Tot } \mathcal{B}$ вложение, соответствующее нулевому сечению. Докажите, что обратный образ $\phi^* T \text{Tot } \mathcal{B}$ изоморфен (как расслоение) прямой сумме $TM \oplus \mathcal{B}$.

Задача 6.15 (!). Докажите, что каждое расслоение на многообразии со счетной базой является прямым слагаемым тривиального.

Указание. Воспользуйтесь задачами 6.14 и 6.13.

Задача 6.16. Докажите, что TS^1 тривиально.

Задача 6.17 (!). Пусть M – многообразие, которое не ориентируемо. Докажите, что TM нетривиально.

Задача 6.18. Докажите, что TS^2 нетривиально.

Задача 6.19. Докажите, что любое одномерное расслоение на сфере S^2 тривиально.

Задача 6.20. Докажите, что TS^3 тривиально.

Задача 6.21 (*). Обозначим за $TS^2 \oplus \mathbb{R}$ прямую сумму TS^2 и тривиального 1-мерного расслоения. Будет ли $TS^2 \oplus \mathbb{R}$ тривиально?

Задача 6.22 (*). Пусть G есть топологическая группа, которая является гладким многообразием, причем групповые операции задаются морфизмами многообразий (такая группа называется **группой Ли**). Докажите, что расслоение TG тривиально.

6.3. Проективные модули

Определение 6.7. Пусть V – модуль над кольцом R , а $V' \subset V$ его подмодуль. Предположим, что у V найдется подмодуль V'' , не пересекающий V' , причем V вместе с V' порождают V . В таком случае V' и V'' называются **прямыми слагаемыми** V , а V – **прямой суммой** V' и V'' , обозначается как $V = V' \oplus V''$.

Задача 6.23. Рассмотрим подмодуль $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Будет ли он прямым слагаемым \mathbb{Z} ?

Задача 6.24. Пусть R – кольцо без делителей нуля, а $V = R$ – одномерный свободный модуль. Найдите все прямые слагаемые в V .

Задача 6.25 (*). Рассмотрим кольцо усеченных полиномов $\mathbb{R}[t]/t^k$, и пусть $V = R$ – одномерный свободный модуль. Найдите все прямые слагаемые в V .

Определение 6.8. Модуль над кольцом R называется **свободным**, если он изоморфен прямой сумме R с собой (возможно, бесконечное число раз). Модуль называется **проективным**, если он изоморфен прямому слагаемому свободного.

Задача 6.26. Докажите, что каждый модуль является фактор-модулем свободного.

Задача 6.27. Пусть V – R -модуль, а $A \xrightarrow{\pi} B$ – сюръективный морфизм R -модулей. Докажите, что каждый морфизм R -модулей $V \xrightarrow{\phi} B$ поднимается до морфизма $V \xrightarrow{\psi} A$, делая следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & A \\ & \searrow \psi & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

- в предположении, что V свободный
- [!] в предположении, что V проективный.

Задача 6.28 (!). Пусть V – такой модуль, для которого верно утверждение предыдущей задачи. Докажите, что V проективный.

Указание. Возьмем в качестве A свободный модуль, сюръективно отображающийся на V , в качестве B возьмем V , а в качестве π тождественное отображение.

Определение 6.9. Пусть $0 \rightarrow A \hookrightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ – точная последовательность R -модулей. Если для какого-то $C' \subset B$, имеет место изоморфизм $B = A \oplus C'$, то говорят, что точная последовательность $0 \rightarrow A \hookrightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ **расщепляется**.

Задача 6.29 (!). Пусть C – R -модуль. Докажите, что следующие условия равносильны.

- (i) Любая точная последовательность вида $0 \rightarrow A \hookrightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ расщепляется.
- (ii) Модуль C проективный.

Задача 6.30 (*). Пусть V – конечнопорожденный проективный модуль над кольцом R . Докажите, что он свободен, если

- а. [*] $R = \mathbb{Z}$.
- б. [*] R – кольцо полиномов $\mathbb{C}[t]$.
- в. [*] R – локальное кольцо.

Задача 6.31. Пусть \mathcal{B} – расслоение над M , а $\mathcal{B}(M)$ его пространство сечений. Докажите, что $\mathcal{B}(M)$ – проективный $C^\infty M$ -модуль

Указание. Воспользуйтесь задачей 6.15.

6.4. Лемма Накаямы

Определение 6.10. Пусть $I \subset R$ – идеал. R -модуль вида R/I называется **циклическим**.

Задача 6.32. Пусть V – циклический R -модуль вида R/I , а $I_1 \supset I$ – идеал в R . Докажите, что $V/I_1V = R/I_1R$.

Задача 6.33. Пусть V – циклический модуль над локальным кольцом A , а \mathfrak{m} – максимальный идеал. Предположим, что $V = \mathfrak{m}V$. Докажите, что $V = 0$.

Указание. Докажите, что $I \subset \mathfrak{m}$, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.34 (!). (лемма Накаямы) Пусть V – конечно-порожденный модуль над локальным кольцом A . Предположим, что $V = \mathfrak{m}V$. Докажите, что $V = 0$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией, и примените предыдущую задачу.

Задача 6.35 ().** (лемма Накаямы в большей общности). Пусть V – конечно-порожденный модуль над R , а $I \in R$ – идеал, такой, что $IV = V$. Докажите, что найдется $r \in R$, сравнимый с единицей по модулю I , и такой, что $rV = 0$.

6.5. Категории и функторы

Определение 6.11. Категорией \mathcal{C} называется набор данных ("объектов категории", "морфизмов между объектами", "композиций морфизмов", "тождественный морфизм"), удовлетворяющих аксиомам, приведенным ниже.

Объекты: Множество $\text{Ob}(\mathcal{C})$ объектов \mathcal{C} (иногда рассматривают не множество, а *класс* $\text{Ob}(\mathcal{C})$, который может и не быть множеством, например, класс всех множеств, или класс всех линейных пространств).

Морфизмы: Для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, задано множество $\text{Mor}(X, Y)$ морфизмов из X в Y .

Композиция морфизмов: Если $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$, $\psi \in \text{Mor}(Y, Z)$, задан морфизм $\phi \circ \psi \in \text{Mor}(X, Z)$, который называется **композицией морфизмов**.

Тождественный морфизм: Для каждого $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ задан морфизм $\text{Id}_A \in \text{Mor}(A, A)$.

Эти данные удовлетворяют следующим аксиомам.

Ассоциативность композиции: $\phi_1 \circ (\phi_2 \circ \phi_3) = (\phi_1 \circ \phi_2) \circ \phi_3$.

Свойства тождественного морфизма: Для любого морфизма $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$, $\text{Id}_X \circ \phi = \phi = \phi \circ \text{Id}_Y$.

Задача 6.36. Докажите, что следующие данные задают категорию.

- Объекты – группы, морфизмы – гомоморфизмы.
- Объекты – векторные пространства, морфизмы – гомоморфизмы.
- Объекты – векторные пространства, морфизмы – сюръективные гомоморфизмы.
- Объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения.
- Объекты – гладкие многообразия, морфизмы – морфизмы многообразий.
- Объекты – векторные расслоения над M , морфизмы – морфизмы расслоений.

Задача 6.37. Докажите, что следующие данные не задают категорию.

- Объекты – многообразия, морфизмы – неособые отображения.
- Объекты – векторные пространства, морфизмы – гомоморфизмы с ненулевым ядром.
- Объекты – конечномерные векторные пространства, морфизмы – гомоморфизмы из A в B ранга $\min(\dim A, \dim B)$ (максимально возможного).

Определение 6.12. Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ — категории. **Ковариантным функтором** из \mathcal{C}_1 в \mathcal{C}_2 называется следующий набор данных.

- Отображение $F : \text{Ob}(\mathcal{C}_1) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$, ставящее в соответствие объектам \mathcal{C}_1 объекты \mathcal{C}_2 .
- Отображение морфизмов $F : \text{Mor}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}(F(X), F(Y))$, определенное для любой пары объектов $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)$.

Эти данные *определяют функтор* из \mathcal{C}_1 в \mathcal{C}_2 , если $F(\phi) \circ F(\psi) = F(\phi \circ \psi)$, и $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$.

Задача 6.38. Пусть \mathcal{C} – категория пучков модулей над окольцованным пространством (M, \mathcal{F}) . Докажите, что соответствие $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}(M)$ задает функтор из \mathcal{C} в категорию $\mathcal{F}(M)$ -модулей.

Определение 6.13. Два функтора $F, G : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ называются **эквивалентными**, если для каждого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)$ задан изоморфизм $\Psi_X : F(X) \rightarrow G(X)$, для любого морфизма $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$,

$$F(\phi) \circ \Psi_Y = \Psi_X \circ G(\phi). \quad (6.1)$$

Определение 6.14. Функтор $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ называется **эквивалентностью категорий**, если найдутся функторы $G, G' : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ такие, что $F \circ G$ эквивалентен тождественному функтору на \mathcal{C}_1 , а $G' \circ F$ эквивалентен тождественному функтору на \mathcal{C}_2 .

Задача 6.39 (*). Докажите, что следующие категории не эквивалентны.

- [*] Категория векторных пространств и категория групп
- [*] Категория топологических пространств и категория векторных пространств
- [*] Категория групп и категория топологических пространств

Задача 6.40. Докажите, что категория локально тривиальных гладких расслоений над M со структурой относительного векторного пространства эквивалентна категории локально тривиальных конечномерных пучков модулей над $C^\infty M$.

Задача 6.41 (*). Пусть M - компактное многообразие. Докажите, что категория пучков $C^\infty M$ -модулей эквивалентна категории модулей над $C^\infty M$.

6.6. Теорема Серра-Суона

Определение 6.15. Пусть $x \in M$ - точка многообразия. **Росток** $C^\infty M$ -модуля V есть тензорное произведение $C_x^\infty M \otimes_{C^\infty M} V$, где $C_x^\infty M$ - кольцо ростков $C^\infty M$ в x . Мы рассматриваем росток V_x как $C_x^\infty M$ -модуль.

Задача 6.42. Пусть V - свободный $C^\infty M$ -модуль. Докажите, что росток V в x есть росток соответствующего пучка $C^\infty M$ -модулей над M .

Задача 6.43. Пусть A - свободный $C^\infty M$ -модуль, разложенный в прямую сумму двух проективных: $A = B \oplus C$, A соответствующий A тривиальный пучок $C^\infty M$ -модулей, а $B \subset A$ подпучок, составленный из сечений $\mathcal{V}(U)$, все ростки которых лежат в B_x . Определим $C \subset A$ аналогичным образом.

- Докажите, что B, C - пучки $C^\infty M$ -модулей.
- Докажите, что $A = B \oplus C$.
- Докажите, что росток B_x $C^\infty M$ -модуля B в $x \in M$ изоморфен ростку B_x соответствующего пучка модулей.

Задача 6.44 (!). Пусть V - проективный модуль над $C^\infty M$, а $\text{rk}_x V := \dim V/\mathfrak{m}_x V$ - размерность слоя V в x ¹. Предположим, что $\dim_x V = i$. Докажите, что росток V_x в x порожден над $C^\infty M$ ровно i элементами V_x .

Указание. Воспользуйтесь леммой Накаямы.

Задача 6.45 (!). Пусть V - проективный модуль над $C^\infty M$, а $Z_i \subset M$ - множество всех $x \in M$, где $\text{rk}_x V \leq i$. Докажите, что Z_i открыто.

Указание. Воспользуйтесь задачей 6.44.

Задача 6.46 (!). Докажите, что ранг проективного модуля на связном многообразии постоянен.

Указание. Проверьте, что $\text{rk}_x(V_1 \oplus V_2) = \text{rk } V_1 \oplus \text{rk } V_2$, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 6.16. Пусть B - тривиальное расслоение над M , а v_1, \dots, v_n - его сечения. Они называются **линейно независимыми над $C^\infty M$** , если в каждой точке $x \in M$, вектора слоев $v_1|_x, v_2|_x, v_3|_x, \dots$ линейно независимы.

¹Это число называется **рангом** V в x .

Задача 6.47. Пусть B – тривиальное n -мерное расслоение, а v_1, \dots, v_n – его сечения, которые порождают B над $U \subset M$. Докажите, что они линейно независимы везде на U .

Задача 6.48 (!). Пусть A – свободный $C^\infty M$ -модуль, разложенный в прямую сумму двух проективных: $A = B \oplus C$, а \mathcal{B}, \mathcal{C} – соответствующие пучки. Докажите, что в окрестности каждой точки $x \in M$, B порождено $\text{rk}_x B$ линейно независимыми над $C^\infty M$ сечениями.

Указание. Воспользуйтесь задачей 6.44, чтобы доказать, что \mathcal{B} порождено $\text{rk}_x B$ сечениями. Чтобы убедиться в независимости этих сечений над $C^\infty M$, примените тот же аргумент к \mathcal{C} , и получите $\text{rk}_x A$ сечений, которые порождают A .

Задача 6.49. Пусть B – пучок модулей над $C^\infty M$, в окрестности каждой точки порожденный n линейно независимыми над $C^\infty M$ сечениями. Докажите, что B локально тривиальный.

Задача 6.50 (!). Пусть B – проективный модуль над $C^\infty M$, а \mathcal{B} – пучок модулей, постоянный как в задаче 6.43. Докажите, что этот пучок локально тривиальный.

Задача 6.51. Пусть \mathcal{C}_p – категория, объекты которой суть проективные модули над $C^\infty M$, а морфизмы – такие гомоморфизмы $C^\infty M$ -модулей, что все ядра и коядра проективны. Проверьте выполнение аксиом категории.

Задача 6.52 (*). (Теорема Серра-Суона). Пусть \mathcal{C}_b – категория векторных расслоений над M .

- а. [*] Рассмотрим соответствие Ψ , которое делает из проективного $C^\infty M$ -модуля векторное расслоение, как в задаче 6.43. Докажите, что $\Psi(B)$ не зависит от выбора свободного модуля $A \supset B$.
- б. [*] Докажите, что Ψ задает функтор из \mathcal{C}_p в \mathcal{C}_b .
- в. [*] Докажите, что этот функтор определяет эквивалентность категорий \mathcal{C}_b и \mathcal{C}_p .