Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 11: Ряды Фурье

11.1. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации

Определение 11.1. Пусть M – компактное топологическое пространство. **Топология равномерной сходимости,** она же C^0**-топология** на C^0M есть топология, заданная нормой $\sup_M |f|$

Задача 11.1. Докажите, что C^0M полно в метрике, заданной нормой $\sup_M |f|$.

Задача 11.2 (!). Рассмотрим последовательность P_0 полиномов на отрезке $[0,1]$, определенную рекурсивно, следующим образом: $P_0 = 0$, $P_i = \frac{1}{2}(P_{i-1}^2 + x)$. Докажите, что $\{P_i\}$ равномерно сходится к $1 - \sqrt{1-x}$.

Задача 11.3. Докажите, что на отрезке $[-1,1]$ найдется последовательность полиномов, равномерно сходящаяся к $|x|$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 11.4. Докажите, что любую кусочно-линейную функцию на отрезке можно выразить как сумму вида $\sum \alpha_i |x - c_i|$, где c_i точки излома функции, а α_i какие-то вещественные числа.

Задача 11.5. Докажите, что любую кусочно-линейную функцию можно равномерно приблизить полиномами.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.6 (!). (теорема Вейерштрасса об аппроксимации)
Докажите, что любую непрерывную функцию на отрезке $[a,b]$ можно равномерно приблизить полиномами.

Задача 11.7 (*). Пусть f – непрерывная функция на интервале $]0,1[$. Всегда ли можно равномерно приблизить f полиномами?

Задача 11.8 (*). Пусть f – непрерывная функция на интервале $]0,1[$. Всегда ли найдется последовательность полиномов, поточечно сходящихся к f?

11.2. Теорема Стоуна-Вейерштрасса

На протяжении этого раздела, M есть компактное топологическое пространство.

Определение 11.2. Пусть $A \subset C^0M$ – подпространство в пространстве непрерывных функций. Говорится, что A **разделяет точки**, если для любых двух точек $x, y \in M$ найдется функция $f \in A$ такая, что $f(x) \neq f(y)$.

Задача 11.9. Пусть $A \subset C^0M$ – плотное в C^0-топологии подпространство. Докажите, что A разделяет точки.

Задача 11.10 (!). Пусть $A \subset C^0M$ – подкольцо, а $\bar{A}$ его замыкание в C^0-топологии. Докажите, что для любой функции $a \in A$, $|a|$ принадлежит $\bar{A}$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 11.3.

Задача 11.11. Пусть $A \subset C^0 M$ – подкольцо, а $\bar{A}$ его замыкание в C^0-топологии. Докажите, что для любых $a, b \in A$, $\min(a, b)$ принадлежит $\bar{A}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.12 (!). Пусть $A \subset C^0 M$ – подкольцо, разделяющее точки, $\bar{A}$ – его замыкание в C^0-топологии, а $U \ni x$ – окрестность $x \in M$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$, найдется функция $a \in \bar{A}$ принимающая значения в $[0, 1]$ и такая, что $a(x) = 1$ и $a|_K < \varepsilon$, где $K = M \backslash U$.

Указание. айдите конечное покрытие компакта K открытыми множествами U_i и функции $f_i \in \bar{A}$ такие, что $f_i(x) = 1$ и $f_i\big|_{U\ i} < \varepsilon$, и положите $a := \min_i(f_i)$

Задача 11.13. Пусть $A \subset C^0 M$ – подкольцо, разделяющее точки, $\bar{A}$ – его замыкание в C^0-топологии, а $f \in C^0 M$. Докажите, что для каждой точки $x \in M$ найдется функция $f_x \in \bar{A}$ такая, что $f_x \leqslant f$ и $f_x(x) > f(x) - \varepsilon$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.14 (!). (теорема Стоуна-Вейерштрасса) Пусть $A \subset C^0 M$ – подкольцо, разделяющее точки, а $\bar{A}$ – его замыкание в C^0-топологии. Докажите, что $\bar{A} = C^0 M$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и найдите у каждой точки x окрестность U_x и функцию $f_x \leqslant f$ такую, что $(f_x + \varepsilon)\Big|_{U_x} > f\Big|_{U_x}$. Выберите конечное подпокрытие $\{U_{x_i}\}$ в $\{U_x\}$. Докажите, что $f \geqslant \max_i f_{x_i} > f - \varepsilon$.

Задача 11.15 (**). Пусть M – компакт, а $A \subset C^0 M$ – подкольцо, не обязательно разделяющее точки. Пусть $\{f_\alpha\} \subset A$ семейство функций, таких, что $\sup f_\alpha$ существует и непрерывен. Докажите, что $\sup f_\alpha \in A$.

11.3. Ряды Фурье

Определение 11.3. Гильбертово пространство есть полное топологическое векторное пространство со счетной базой, где норма задана положительно определенным скалярным произведением по формуле $|x| = \sqrt{g(x, x)}$.

Замечание. Гильбертовы пространства по определению предполагаются бесконечномерными.

Определение 11.4. Гильбертов базис в гильбертовом пространстве H есть счетный набор ортонормированных векторов $\{a_i\}$ такой, что H совпадает с замыканием подпространства, порожденного a_i.

Задача 11.16. Докажите, что у любого гильбертова пространства есть гильбертов базис.

Указание. Воспользовавшись леммой Цорна, найдите в H максимальный набор ортонормированных векторов. Чтобы убедиться, что он счетный, воспользуйтесь тем, что H имеет счетную базу.

Задача 11.17 (!). Докажите, что все гильбертовы пространства изоморфны.

Задача 11.18. Полином Фурье на окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ есть функция вида

$$a_1 e^{2\pi\sqrt{-1}n_1 t} + a_2 e^{2\pi\sqrt{-1}n_2 t} + ... + a_k e^{2\pi\sqrt{-1}n_k t}.$$

Докажите, что полиномы Фурье плотны в C^0-топологии.

Задача 11.19 (!). Пусть $L^2(S^1)$ есть гильбертово пространство, порожденное непрерывными функциями на окружности, со скалярным произведением $(f,g) = \int_{S^1} fg$. Докажите, что функции $t \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}nt}$ образуют гильбертов базис в $L^2(S^1)$

Указание. Чтобы доказать, что замыкание $\langle e^{2\pi\sqrt{-1}nt}\rangle$ совпадает с $L^2(S^1)$, воспользуйтесь теоремой Стоуна-Вейерштрасса.

Определение 11.5. **Ряд Фурье** есть элемент $f \in L^2(S^1)$, записанный в виде $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi\sqrt{-1}nt}$, где $\sum |a_n|^2 < \infty$.

Определение 11.6. Обозначим за T^k k-мерный тор, $T^k = (S^1)^k$. **k-мерный ряд Фурье** есть элемент в $L^2(T^k)$, заданный в виде

$$\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathbb{Z}^k} a_{i_1,\dots,i_k} e^{2\pi\sqrt{-1}\sum_{l=1}^k i_l t_l}.$$

где $\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathbb{Z}^k} |a_{i_1,\dots,i_k}|^2 < \infty$.

Задача 11.20 (!). Постройте естественный изоморфизм между $L^2(T^k)$ и пространством k-мерных рядов Фурье.

Задача 11.21 (!). Пусть f – непрерывная функция на S^1. Запишем **ряд Фурье** f формулой

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi\sqrt{-1}nt},$$

где $a_n = \int_{S^1} f e^{-2\pi\sqrt{-1}nt}$. Докажите, что сумма ряда Фурье f равномерно сходится к f.

Указание. Воспользуйтесь $\sum |a_i|^2 < \infty$ и докажите, что сумма ряда Фурье f непрерывна.

Задача 11.22 (*). (лемма Римана-Лебега)
Пусть f – интегрируемая функция на S^1, а $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi\sqrt{-1}nt}$ — ее ряд Фурье. Докажите, что $\lim a_n = 0$.

11.4. Компактные операторы

Определение 11.7. **Единичной сферой** в пространстве с нормой называется множество всех векторов, для которых $|x| = 1$.

Задача 11.23 (*). Докажите, что единичная сфера в бесконечномерном гильбертовом пространстве стягиваема (допускает гомотопическую эквивалентность с точкой).

Определение 11.8. Пусть V_1, V_2 - пространства с нормой. Линейный оператор $E: V_1 \longrightarrow V_2$ называется **ограниченным**, если существует константа C такая, что

$$\frac{|E(v)|}{|v|} < C$$

для любого ненулевого $v \in V_1$.

Задача 11.24. Докажите, что ограниченные операторы из V_1 в V_2 образуют линейное пространство. Докажите, что оператор ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен в топологии, заданной нормой.

Замечание. Довольно часто термин *непрерывный оператор* употребляют как синоним к *ограниченный оператор*.

Замечание. Единичный шар в пространстве с нормой - это множество точек $v \in V$ таких, что $|v| \leqslant 1$ ("замкнутый шар") или $|v| < 1$ ("открытый шар"). "Шар радиуса r" в пространстве с нормой - множество точек $v \in V$ таких, что $|v| \leqslant r$ или $|v| < r$. "Ограниченное множество" - подмножество V, содержащееся в каком-то шаре. В этих терминах, определение ограниченного оператора можно переговорить так: "ограниченный оператор это оператор, переводящий ограниченые множества в ограниченные".

Задача 11.25. (теорема Рисса)
Пусть H — гильбертово пространство (по умолчанию, все гильбертовы пространства предполагаются бесконечномерными). Докажите, что единичный замкнутый шар в H не компактен.

Указание. Пусть $\{z_i\}$ гильбертов базис. Докажите, что в $\{z_i\}$ нет сходящихся подпоследовательностей.

Задача 11.26 (*). Пусть V – бесконечномерное векторное пространство, с топологией, заданной нормой. Докажите, что единичный замкнутый шар в V не компактен.

Определение 11.9. Множества, содержащиеся в компакте, называются **предкомпактными**.

Определение 11.10. Пусть V_1, V_2 - топологическое векторное пространство с нормой. Оператор E; $V_1 \longrightarrow V_2$ называется **компактным**, если образ любого ограниченного множества предкомпактен.

Определение 11.11. Пусть H – гильбертово пространство с базисом $\{z_i\}$, $\sum a_i \leqslant \infty$ – абсолютно сходящийся ряд, а $K \subset H$ – подмножество, заданное рядами вида $\sum_i \lambda_i z_i$, где $\lambda_i^2 \leqslant a_i$. Тогда K называется **гильбертовым кубом**.

Задача 11.27 (!). Докажите, что гильбертов куб компактен.

Задача 11.28 (*). Докажите, что гильбертов куб гомеоморфен счетному произведению единичного отрезка на себя, с топологией произведения (*тихоновскому кубу*).

Задача 11.29. Пусть H — гильбертово пространство, $\{z_i\}$ его ортонормированный базис, а $K : H \longrightarrow H$ оператор, переводящий z_i в $\alpha_i z_i$. Докажите, что K компактный тогда и только тогда, когда $\sum |\alpha_i|^2 \leqslant \infty$.

Задача 11.30 (*). Пусть $A : H \longrightarrow H$ - компактный оператор, а B_1 - замкнутый шар радиуса 1 в H. Для каких A его образ $A(B_1)$ компактен?

Задача 11.31 (*). Пусть $E = E_1 + K$ — инъективный линейный оператор, такой, что E_1 это гомеоморфизм, а K компактно. Докажите, что E — тоже гомеоморфизм.

11.5. Соболевские пространства

Определение 11.12. Пусть $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ - гладкая функция с компактным носителем. Для каждого монома

$$P_\alpha = \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} \cdots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_1^{k_n}}$$

рассмотрим соответствующую частную производную f

$$P_\alpha(f) = \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} \cdots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_1^{k_n}} f$$

s-я соболевская норма $|f|_s$ определяется так:

$$|f|_s^2 = \sum_{\deg P_\alpha \leqslant s} \int |P_\alpha(f)|^2 \operatorname{Vol}$$

где сумма пробегает все мономы степени от нуля до s, $\mathrm{Vol} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge ...dx_n$ - стандартная форма объема. Очевидно, что это билинейная, квадратичная форма на пространстве функций; ее корень и задает соболевскую норму.

Задача 11.32. Естественное отображение $\mathbb{R}^n \longrightarrow T^n$ из $\mathbb{R}^n$ в тор инъективно на шаре B радиуса $1/2$. Это позволяет рассматривать функции с носителем в B как функции на T^n. Рассмотрим ряд Фурье для функции f:

$$f = \sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} \tau_{k_1,\dots k_n} e^{2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n k_i t_i}$$

Докажите, что

$$|f|_s^2 = \sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} \left(|\tau_{k_1,\dots k_n}|^2 \sum_{i=1}^n (1 + k_i^2 + k_i^4 + ... + k_i^{2s} \right)$$

Задача 11.33 (!). (Лемма Реллиха)
Докажите, что естественное отображение $L_s^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_{s-i}^2(\mathbb{R}^n)$ компактно на функциях со значениями в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, для любого $i > 0$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

11.6. Соболевские нормы на многообразии

Задача 11.34. Пусть F и G — векторные расслоения на многообразии M, снабженные связностями $\nabla_F : F \longrightarrow F \otimes \Lambda^1 M$, $\nabla_G : G \longrightarrow G \otimes \Lambda^1 M$. Зададим на $F \otimes G$ оператор $\nabla : F \otimes G \longrightarrow F \otimes G \otimes \Lambda^1 M$ формулой Лейбница,

$$\nabla(f \otimes g = \nabla_F(f) \otimes g + f \otimes \nabla_G(g).$$

Докажите, что это связность.

Определение 11.13. Пусть F - расслоение с метрикой и связностью на M, а g - метрика на M. Предположим, что на $\Lambda^1 M$ тоже задана связность. Пользуясь формулой Лейбница, мы получаем связность

$$\nabla : F \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes ...}_{i-1 \text{ раз}} \longrightarrow F \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes ...}_{i \text{ раз}}$$

Определим **соболевскую норму, ассоциированную со связностью и метрикой** по формуле

$$|f|_s^2 = \sum_{i=0}^s \int |\nabla^i f| \,\mathrm{Vol}$$

где

$$\nabla^i : F \longrightarrow F \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes ...}_{i \text{ раз}}$$

i-я степень связности, а $|\cdot|$ - естественная метрика на расслоении $F \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes ...}_{i \text{ раз}}$, индуцированная метрикой на M и F. Соответствующее гильбертово пространство обозначается $L_s^2(F)$. Если $M = \mathbb{R}^n$, а связность на F тривиальна, это определение совпадает с приведенным выше.

Задача 11.35. Пусть F - тривиальное расслоение на $\mathbb{R}^n$, снабженное какой-то связностью. Возьмен какую-то связность на $\Lambda^1\mathbb{R}^n$. Пусть ${}^1|\ |_s^2$ — обычная метрика Соболева, а ${}^2|\ |_s^2$ — метрика, определенная по связности как указано выше. Докажите, что для сечений с носителем в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, имеем

$${}^2|f|_s^2 = {}^1|f|_s^2 + C^1|f|_{s-1}^2$$

где константа C зависит от связности на F и $\Lambda^1\mathbb{R}^n$.

Определение 11.14. Две нормы на векторном пространстве называются **эквивалентными**, если они индуцируют одинаковую топологию.

Задача 11.36. Пусть $K : H \longrightarrow H_1$ — компактный оператор на гильбертовых пространствах (H, g) и (H_1, g_1). Докажите, что $\sup_{v \neq 0} \frac{g_1(K(v), K(v))}{g(v,v)} < \infty$.

Задача 11.37. Пусть $K : H \longrightarrow H_1$ — компактный оператор на гильбертовых пространствах (H, g) и (H_1, g_1). Определим метрику g' на H по формуле $g'(v, v) = g(v, v) + g_1(K(v), K(v))$. Докажите, что g и g' эквивалентны.

Указание. Имеем

$$g(v, v) \leqslant g'(v, v) \leqslant (1 + C)g(v, v),$$

где $C = \sup_{v \neq 0} \frac{g_1(K(v), K(v))}{g(v,v)}$.

Задача 11.38 (!). Докажите, что метрика Соболева на тривиальном расслоении, определенная через частные производные, эквивалентна метрике Соболева, определенной через связности.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.39. Пусть F - расслоение со связностью на M, g_1, g_2 - метрики на TM, ${}^1|\ |^2_s$, ${}^2|\ |^2_s$ - нормы Соболева, связанные с g_1, g_2. Докажите, что для сечений с носителем в компакте $B \subset M$, имеет место

$$C_2{}^1|f|^2_s \leqslant {}^2|f|^2_s \leqslant C_1{}^1|f|^2_s$$

где константы C_1, C_2 выбраны таким образом, чтобы в любой точке B имело место неравенство

$$C_2|T|_{g_1} \leqslant |T|_{g_2} \leqslant C_1|T|_{g_1}$$

для любого тензора T над $\Lambda^1(M)$ валентности не больше s.

Задача 11.40 (*). (Лемма Реллиха) Пусть M - компактное многообразие. Тогда естественное вложение $L^2_s(F) \longrightarrow L^2_{s-i}(F)$ компактно, для любого $i > 0$.

Указание. Воспользуйтесь разбиением единицы и леммой Реллиха для $\mathbb{R}^n$.