Домашний экзамен за второй семестр

Задача 1. Опишите все числовые поля с дискриминантом ≤ 20.

Задача 2. a) Вычислите группу автоморфизмов над $\overline{\mathbb{F}}_2$ эллиптической кривой $y^2 + y = x^3 + x + 1$.

b) Опишите все неизоморфные эллиптические кривые над $\mathbb{F}_2$ и посчитайте их группы $\overline{\mathbb{F}}_2$-автоморфизмов. Какие из этих кривых становятся изоморфными над $\mathbb{F}_4$? А над $\mathbb{F}_{16}$?

Задача 3. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — квадратичное расширение. Пусть $\mathcal{O}$ — порядок поля K с кондуктором f (т.е. $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + f\mathcal{O}_K$). Покажите, что число классов $h_{\mathcal{O}}$ выражается через h_K формулой:

$$h_{\mathcal{O}} = \frac{h_K}{|\mathcal{O}_K^\times/\mathcal{O}^\times|} \cdot \frac{|(\mathcal{O}_K/f\mathcal{O}_K)^\times|}{|(\mathcal{O}/f\mathcal{O})^\times|}$$

Задача 4. a) Пусть $l \geq 2$ — такое целое число, что $4l^3 + 27$ свободно от квадратов, $f_l(x) = x^3 + lx - 1$, α_l — вещественный корень $f_l(x)$, $K_l = \mathbb{Q}(\alpha_l)$. Покажите, что α_l^{-1} — фундаментальная единица $\mathcal{O}_{K_l}$.

b) Посчитайте фундаментальную единицу и группу классов идеалов поля K_{10}.

c) Покажите, что в предположениях первого пункта задачи для чётного l фундаментальными единицами L — поля разложения $f_l(x)$ — являются α_l^{-1} и $\sigma(\alpha_l^{-1})$, где $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ — какой-то элемент.

Задача 5. a) Покажите, что уравнение $x^4 - 17 = 2y^2$ имеет решение в $\mathbb{Q}_p$ для всех p.

b) Убедитесь, что это уравнение не имеет рациональных решений.

Подсказка: используйте либо теорию эллиптических кривых, либо разложение на множители в $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$.