Курс "Теория кривых", листок 1, Дискретные нормирования

Задача 1. Докажите, что пополнения по дискретному нормированию ν_p, $p \in C$

1) для поля рациональных функций кривой изоморфно полю рядов Лорана,

2) для кольца регулярных в p функций изоморфно кольцу формальных степенных рядов,

3) для пространства 1-форм изоморфно $\Bbbk((f))df$,

4) для пространства регулярных в p 1-форм изоморфно $\Bbbk[[f]]df$.

Задача 2. Докажите, что вычет формы в точке не зависит от выбора униформизующей (т.е. локальной координаты).

Задача 3. Докажите, что $\sum_{p \in C} Res_p \omega = 0$ для любой $\omega \in \Omega^1(C)$

Задача 4. Докажите, что $Res_p \frac{df}{f} = \nu_p(f)$

Задача 5. Докажите, что дискретное неархимедово нормирование на $\Bbbk(C)$ это ν_p для некоторой $p \in C$, где 1) $C = \mathbb{P}^1$, 2) C - любое.

Задача 6. Докажите, что для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(C)$ верно, что $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \Bbbk(C)$

Задача 7. (Artin-Whaples approximation theorem) Докажите, что для любого набора дискретных неархимедовых нормирований $\nu_1, \ldots, \nu_n$ на $\Bbbk(C)$ и для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ найдутся такие $f \in \Bbbk(C), \omega \in \Omega^1(C)$, такие что $\nu_i(f) > a_i$, $\nu_i(\omega) > a_i$ для любого i.

Задача 8. (Теорема Безу)

1) Докажите, что два однородных многочлена f, g от 3 переменных имеют ровно $deg f \cdot deg g$ общих нулей на $\mathbb{P}^2$.

2) Докажите, что n однородных многочленов $f_1, \ldots, f_n$ от $n+1$ переменных имеют ровно $deg f_1 \ldots deg f_n$ общих нулей на $\mathbb{P}^n$.