Курс "Теория кривых", листок 2, Эллиптические кривые

Задача 1. Докажите, что любое отображение проективной прямой в себя имеет неподвижную точку.

Задача 2. Докажите, что отображение эллиптической кривой в себя $x \to x \oplus b$ для нетривиального элемента b не имеет неподвижных точек.

Задача 3. Докажите, что на эллиптической кривой $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

Задача 4. Пусть m_1, m_2, m_3 и l_1, l_2, l_3 - две тройки прямых на проективной плоскости. Известно, что кубика проходит через 8 из 9 точек $A_{ij} = m_i \cap l_j$. Докажите, что тогда она проходит и через 9-ю.

Задача 5. Докажите, что $a + b - c - d$ - главный дивизор на эллиптической кривой тогда и только тогда, когда точка перечения прямых (ab) и (cd) (в случае совпадения точек x и y прямая (xy) выбирается как касательная к кривой) лежит на кривой.

Задача 6. Определим отображение $AJ \oplus Deg\colon Div(X) \mapsto X \oplus \mathbb{Z}$ как $AJ(a_1 + \ldots a_n - b_1 - \ldots - b_m) = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n \ominus b_1 \ominus \ldots \ominus b_m$, $Deg(a_1 + \ldots a_n - b_1 - \ldots - b_m) = n - m$. Докажите, что дивизор D на эллиптической кривой главный тогда и только тогда, когда $AJ(D) = 0$, $Deg(D) = 0$.

Задача 7. Докажите, что если 0 - точка перегиба на ээлиптической кривой X, то для точек A, B, C, лежащих на одной прямой, $A \oplus B \oplus C = 0$.

Задача 8. Обозначим через $\oplus_Q$ сложение точек на эллиптической кривой, где тривиальным элементом положен Q. Чем отличаются $A \oplus_{P_1} B$ и $A \oplus_{P_2} B$?

Задача 9. * Найдите $PicX \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}$ для эллиптической кривой