Тензорное произведение

Помимо обычных, коммутативных многочленов $\mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ и косых многочленов $\mathsf{k}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, можно рассмотреть некоммутативные многочлены – ассоциативное кольцо, порождённое над полем k переменными $x_1, \dots, x_n$, на которые не наложено никаких соотношений. Эти три кольца многочленов – координатная запись соответственно симметрической, внешней и тензорной алгебры векторного пространства, которые мы скоро определим и изучим.

Пусть A – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, M и N – модули над A. Дадим два определения тензорного произведения единицей M и N над A.

Определение 1. Рассмотрим свободный A-модуль $F_{M,N}$ с базисом $e_{m,n}$, где m и n пробегают все элементы M и N соответственно. Определим $M \otimes_A N$ как фактор $F_{M,N}$ по соотношениям:

$$M \otimes_A N = F_{M,N} \Bigg/ \left\langle \begin{matrix} e_{m+m',n} - e_{m,n} - e_{m',n} \\ e_{m,n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'} \\ e_{am,n} - ae_{m,n} \\ e_{m,an} - ae_{m,n} \end{matrix} \right\rangle,$$

где $m, m' \in M, n, n' \in N, a \in A$ – всевозможные элементы.

Образ элемента $e_{m,n}$ при канонической проекции $F_{M,N} \to M \otimes_A N$ обозначается $m \otimes n$. Элементы вида $m \otimes n$ называют *разложимыми*, они порождают тензорное произведение как модуль.

Пример 2. $A \otimes_A A \cong A$.

Доказательство. Отображение $F_{A,A} \to A,\ e_{a,a'} \mapsto aa'$ переводит соотношения в ноль, и поэтому спускается до отображения на факторе $A \otimes_A A \to A, a \otimes a' \mapsto aa'$. Обратный гомоморфизм $A \to A \otimes_A A$ задаётся формулой $a \mapsto a \otimes 1$. □

Для второго определения нам понадобятся билинейные отображения.

Пусть M, N, K – модули над A. Отображение $f\colon M \times N \to K$ называется *билинейным*, если $\forall m \in M$ отображение $f(m, -)\colon N \to K$ линейно и $\forall n \in N$ отображение $f(-, n)\colon M \to K$ линейно (т.е., f линейно по каждому из аргументов в отдельности).

Примеры:

1. умножение $A \times A \to A$;
2. отображение $p\colon M \times N \to M \otimes_A N$, переводящее пару (m, n) в $m \otimes n$.

Определение 3. Тензорным произведением M и N называется универсальное билинейное отображение из $M \times N$.

Определение 4. Билинейное отображение $p\colon M \times N \to U$ называется *универсальным*, если для любого билинейного отображения $q\colon M \times N \to K$ существует и единственен гомоморфизм $f\colon U \to K$ такой, что $fp = q$.

Замечание 5. Условия наподобие приведённого выше обычно записывают в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & U \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & K & \end{tikzcd},$$

где утверждается существование единственной пунктирной стрелки, делающей диаграмму коммутативной. Для нарисованной диаграммы коммутативность означает, что два возможных гомоморфизма из $M \times N$ в K равны.

Замечание 6. Данное определение – пример определения объекта при помощи универсального свойства, с такими определениями мы ещё не раз столкнёмся.

Объект, определённый универсальным свойством, может и не существовать. Однако если он существует, то всегда единственен.

Предложение 7. *Универсальное билинейное отображение из $M \times N$ единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $q_{1,2}\colon M \times N \to U_{1,2}$ – два универсальных билинейных отображения. q_1 универсально $\Rightarrow \exists f_1\colon U_1 \to U_2$ такое, что $q_2 = f_1 q_1$. q_2 универсально $\Rightarrow \exists f_2\colon U_2 \to U_1$ такое, что $q_1 = f_2 q_2$. При этом $q_1 = f_2 f_1 q_1$, по универсальности q_1 получаем, что $f_2 f_1 = 1_{U_1}$ (единственность замыкания диаграммы). Аналогично $f_1 f_2 = 1_{U_2}$, т.е. f_1 и f_2 – взаимно обратные изоморфизмы. □

Точно так же доказывается единственность любого универсального объекта.

Предложение 8. *Билинейное отображение $p\colon M \times N \to M \otimes_A N$ является универсальным.*

Доказательство. Если $q\colon M \times N \to K$ – билинейное отображение, то равенство из определения 4 примет вид $f(m \otimes n) = q(m, n)$. Элементы $m \otimes n$ порождают $M \otimes N$, значит f единственно. Построим f: определим отображение $F_{M,N} \to K : e_{m,n} \mapsto q(m, n)$. При этом соотношения из определения 1 переходят в ноль, значит оно пропускается через фактор по соотношениям, т.е. через $M \otimes N$. □

Таким образом, мы убедились в том, что два определения тензорного произведения эквивалентны.

Примеры:

1. $A^{\oplus n} \otimes_A N \cong N^{\oplus n}$ для любого A-модуля N;
2. $\mathbb{C}[x, y] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z] \cong \mathbb{C}[x, y, z]$;
3. Пусть X, Y – конечные множества, $R(X), R(Y)$ – множества вещественнозначных функций на X и Y. Тогда $R(X) \otimes_{\mathbb{R}} R(Y) \cong R(X \times Y)$;
4. Пусть X, Y – множества (возможно, с дополнительной структурой), $R(X), R(Y)$ – множества хороших (в некотором смысле) функций на X и Y. Тогда имеется вложение $R(X) \otimes_{\mathbb{R}} R(Y) \to R(X \times Y)$. Этот пример обобщает два предыдущих.

Простейшие свойства тензорного умножения напоминают простейшие свойства умножения чисел – коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность.

Предложение 9. *Для любых A-модулей M, M', N, K имеются канонические изоморфизмы*

1. $(M \oplus M') \otimes N \cong (M \otimes N) \oplus (M' \otimes N)$;
2. $(M \otimes N) \otimes K \cong M \otimes (N \otimes K)$;
3. $M \otimes N \cong N \otimes M$;

4. *если M и N – свободные модули с базисами e_i и f_j соответственно, то $M \otimes N$ – свободный модуль с базисом $e_i \otimes f_j$.*

Доказательство. 1-3 следуют из того, что обе части равенства обладают одним и тем же универсальным свойством. Например, в $(M \otimes N) \otimes K$ и $M \otimes (N \otimes K)$ попадают универсальные трилинейные отображения из $M \times N \times K$.

4 следует из 1 и того, что $A \otimes_A A = A$. □

Тензорно перемножать можно не только модули, но и гомоморфизмы модулей. Пусть $f\colon M \to M'$ и $g\colon N \to N'$ – гомоморфизмы A-модулей. Определим гомоморфизм $f \otimes g\colon M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ равенством $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$. Говоря более аккуратно, рассмотрим сквозное билинейное отображение $M \times N \to M' \times N' \xrightarrow{p'} M' \otimes N'$. По универсальному свойству тензорного произведения, оно пропускается через $p\colon M \times N \to M \otimes N$. Эту конструкцию удобно изображать диаграммой

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f\times g"] \arrow[d, "p"] & M' \times N' \arrow[d, "p'"] \\ M \otimes N \arrow[r, dashed, "f\otimes g"] & M' \otimes N' \end{tikzcd}.$$

Напомним, если U и V – модули над коммутативным кольцом A, то определены A-модули $\mathrm{Hom}(U,V) = \mathrm{Hom}_A(U,V)$ и $V^* = \mathrm{Hom}_A(V,A)$. При этом если V свободен с базисом $e_1,\dots,e_n$, то у V^* есть двойственный базис $e^1,\dots,e^n$.

Предложение 10. *Пусть U и V – модули, причём U – конечно порождённый свободный. Тогда имеется канонический изоморфизм $V \otimes U^* \cong \mathrm{Hom}(U,V)$.*

Доказательство. Определим отображение $V \otimes U^* \to \mathrm{Hom}(U,V)$: $v \otimes g$ переходит в $h \in \mathrm{Hom}(U,V), h(u) = v \cdot g(u)$ (где $v \in V, g \in U^*$). Раскладывая U и U^* по базису, проверяем, что это изоморфизм. □

Замечание 11. Пусть в этом предложении U и V свободные с базисами $e_1,\dots e_n$ и $f_1,\dots,f_m$. Тогда при описанном изоморфизме базисный элемент $f_i \otimes e^j$ соответствует преобразованию, записываемому матрицей $E_{ij} \in Mat_{m\times n}$, у которой в i-й строке j-м столбце стоит 1, а в остальных местах – нули.

Предложение 12. *Пусть U, V и W – модули, тогда имеется канонический изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V,W)).$$

Доказательство. Явно зададим взаимно-однозначное соответствие:

$$f \in \mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \leftrightarrow g \in \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V,W)), g(u)(v) = f(u \otimes v).$$

□

Следствие 13. *Пусть U, V и W – модули, причём V – конечно порождённый свободный. Тогда имеется канонический изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, V^* \otimes W).$$

Определение 14. Пусть V – произвольный модуль над A. Отображение $\mathrm{tr}\colon V \otimes V^* \to A$, определённое формулой $\mathrm{tr}(v \otimes f) = f(v)$, называется *свёрткой*.

Если V – свободный конечно порождённый, то записывая tr в координатах, получим

$$e_i \otimes e^j \mapsto \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Т.е., это след оператора, записанного матрицей, чем объясняется обозначение. Применяя следствие 13 к V, V^* и A, получим канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}(V \otimes V^*, A) \cong \mathrm{Hom}(V, V)$. Свёртка при нём отвечает единичному оператору.

Предложение 15. *Пусть V – свободный конечно порождённый модуль. Тогда билинейные формы на V – это элементы $V^* \otimes V^*$.*

На языке свёрток удобно говорить о многих понятиях линейной алгебры.

Например, отображение $\mathrm{Hom}(U, V) \times U \to V$, вычисляющее значения линейного отображения на векторе, записывается так:

$$\mathrm{Hom}(U, V) \times U \to V \xrightarrow{p} \mathrm{Hom}(U, V) \otimes U \cong V \otimes U^* \otimes U \xrightarrow{1_V \otimes \mathrm{tr}} V \otimes A \cong A.$$

Отображение $V^* \otimes V^* \times V \times V \to A$, вычисляющее значения билинейной формы на паре векторов, есть композиция

$$V^* \otimes V^* \times V \times V \to V^* \otimes V^* \otimes V \otimes V \cong V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{\mathrm{tr} \otimes \mathrm{tr}} A \otimes A \cong A.$$

А композицию линейных отображений можно представить как

$$\mathrm{Hom}(V, W) \times \mathrm{Hom}(U, V) \cong W \otimes V^* \times V \otimes U^* \xrightarrow{p} W \otimes V^* \otimes V \otimes U^* \xrightarrow{1_W \otimes \mathrm{tr} \otimes 1_{U^*}}$$
$$\xrightarrow{1_W \otimes \mathrm{tr} \otimes 1_{U^*}} W \otimes A \otimes U^* \cong W \otimes U^* \cong \mathrm{Hom}(U, W).$$

Удобно ввести следующее

Определение 16. Пусть V – свободный конечно порождённый модуль. *Тензором типа* (p, q) $(p, q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ на V называется элемент модуля

$$T^{p,q}(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q}.$$

По определению, $T^{0,0}(V) = A$.

Тензорами являются многие конструкции из линейной алгебры.

Пример 17.
Тензоры типа $(1, 0)$ – векторы;
Тензоры типа $(0, 1)$ – ковекторы, или функционалы;
Тензоры типа $(1, 1)$ – операторы;
Тензоры типа $(0, 2)$ – билинейные формы.

Свёрткой по i-му и j-му индексам называется отображение $T^{p,q}(V) \to T^{p-1,q-1}(V)$, определяемое как композиция

$$T^{p,q}(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q} \cong \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p-1} \otimes V \otimes V^* \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q-1} \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{tr} \otimes 1}$$
$$\xrightarrow{1 \otimes \mathrm{tr} \otimes 1} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p-1} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q-1} = T^{p-1,q-1}(V),$$

где первое отображение – перестановка i-го сомножителя V и j-го сомножителя V^* к середине.