Тензорная, симметрическая и внешняя степени

Сегодня мы определим тензорную, симметрическую и внешнюю алгебры векторного пространства.

Определение 1. *Алгеброй* A над полем k (или k-*алгеброй*) называется множество, снабжённое структурами кольца и векторного пространства над k, причём эти структуры согласованы, а именно:

$$\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$$

для всех $\lambda \in \mathsf{k}, a, b \in A$.

Пример 2.
1. $\mathrm{Mat}_n(\mathsf{k})$ – алгебра над k;
2. $\mathbb{C}[x, y, z]$ – алгебра над $\mathbb{C}$;
3. $\mathbb{H}$ и $\mathbb{C}$ – алгебры над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$;
4. $\mathbb{H}$ – не алгебра над $\mathbb{C}$. Хотя на кватернионах и можно ввести умножение на комплексные числа (например, слева), эта структура векторного пространства над $\mathbb{C}$ не будет согласована с умножением.

Предложение 3. *Пусть A – ассоциативное кольцо с единицей. Ввести на A структуру k-алгебры – всё равно, что задать гомоморфизм колец $f\colon \mathsf{k} \to A$ такой, что $f(\mathsf{k})$ лежит в центре A (т.е. элементы $f(\mathsf{k})$ коммутируют со всеми элементами A).*

Доказательство. Если задан f, то умножение на элементы k определяется так: $\lambda a := f(\lambda) \cdot a$. Наоборот, если A – k-алгебра, то определим f так: $f(\lambda) = \lambda \cdot 1$. $\square$

Дальше нас будут интересовать только ассоциативные алгебры с единицей.

Определение 4. Отображение k-алгебр $A \to B$ называется *гомоморфизмом*, если это гомоморфизм колец и линейное отображение векторных пространств над k.

Сегодня мы будем считать, что k – поле характеристики ноль, а V – конечномерное векторное пространство над k.

Определение 5. *Тензорной алгеброй* векторного пространства V называется пространство

$$T^\bullet V = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}, p \geqslant 0} T^p V = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}, p \geqslant 0} V^{\otimes p} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}, p \geqslant 0} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p},$$

на котором введено умножение при помощи универсальных билинейных отображений

$$\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \times \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q} \to \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p+q}.$$

Более явно,

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) \cdot (u_1 \otimes \ldots \otimes u_q) := v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_q.$$

Компоненты $T^p V = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p}$ называются *тензорными степенями* пространства V.

По определению, считается, что $T^0V = \mathsf{k}$, вложение $\mathsf{k} = T^0V \to T^\bullet V$ превращает $T^\bullet V$ в алгебру над k. Несложно видеть, что она ассоциативна, но, вообще говоря, некоммутативна. Обозначим вложение $V = T^1V \to T^\bullet V$ через σ.

Предложение 6. *$T^\bullet V$ – универсальная ассоциативная алгебра с единицей над k, порождённая V, т.е. для любого линейного отображения $f\colon V \to A$ в ассоциативную алгебру с единицей над k существует единственный гомоморфизм k-алгебр $g\colon T^\bullet V \to A$ такой, что $g\sigma = f$:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & & T^\bullet V \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & A. & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Если такой g существует, то из $g\sigma = f$ следует $g(v) = f(v)$ на T^1V, а так как g гомоморфизм, то $g(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) = g(v_1) \cdot \ldots \cdot g(v_p) = f(v_1) \cdot \ldots \cdot f(v_p)$ на T^pV. Тем самым, g определён однозначно. Ясно также, что эти формулы действительно корректно определяют гомоморфизм алгебр g. $\square$

Это универсальное свойство тензорной алгебры можно при желании принять за её определение.

Пусть I – двусторонний идеал в $T^\bullet V$, порождённый всевозможными элементами

$$v \otimes u - u \otimes v \in T^2V.$$

Определение 7. Определим симметрическую алгебру векторного пространства $S^\bullet V$ как факторалгебру $T^\bullet V/I$.

Пусть π – проекция $T^\bullet V \to S^\bullet V$. Сквозное отображение $V \xrightarrow{\sigma} T^\bullet V \xrightarrow{\pi} S^\bullet V$ будем также обозначать через σ. Ясно, что элементы вида $\sigma(v), v \in V$ в $S^\bullet V$ коммутируют друг с другом: коммутаторы $u \otimes v - v \otimes u$ лежат в идеале I. Причём такие элементы порождают всю симметрическую алгебру, и значит она коммутативна.

Симметрическая алгебра также обладает универсальным свойством – это универсальная ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, порождённая V. А именно, верно

Предложение 8. *Для любого линейного отображения $f\colon V \to A$ в ассоциативную коммутативную алгебру с единицей над k существует единственный гомоморфизм k-алгебр $g\colon S^\bullet V \to A$ такой, что $g\sigma = f$:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & & S^\bullet V \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & A. & \end{tikzcd}$$

Доказательство.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & T^\bullet V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "g'"] & S^\bullet V \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & A. & \end{tikzcd}$$

По универсальному свойству тензорной алгебры существует гомоморфизм алгебр $g'\colon T^\bullet \to A$ такой, что $g'\sigma = f$. При этом $g'(v \otimes u - u \otimes v) = g'(v) \cdot g'(u) - g'(u) \cdot g'(v) = 0$ так как A коммутативна, и значит $g'(I) = 0$. Поэтому g' пропускается через фактор $T^\bullet V$ по I т.е. через $S^\bullet V$. Единственность g следует из конструкции. $\square$

Так же, как и тензорная алгебра, симметрическая алгебра допускает разложение $S^\bullet V = \bigoplus_{p\geqslant 0} S^p V$. Чтобы в этом убедиться, нам понадобятся некоторые понятия.

Определение 9. *Градуированной* k*-алгеброй* называется алгебра, имеющая вид

$$A = \bigoplus_{p\geqslant 0} A_p,$$

где A_p – векторные подпространства такие, что $A_p \cdot A_q \subset A_{p+q}$ и $1 \in A_0$. Элементы $a \in A_p$ называются *однородными* степени p. Любой элемент градуированной алгебры есть конечная сумма однородных.

Пример 10.

1. тензорная алгебра векторного пространства V: $A_p = T^p V$;
2. алгебра многочленов $\mathbb{C}[x, y, z]$: A_p состоит из однородных многочленов степени p;
3. алгебра взвешенных многочленов $\mathbb{C}[x, y, z]_{a,b,c}$: A_p порождено мономами степени p, т.е. такими $x^k y^m z^n$, что $ak + bm + cn = p$;
4. любую алгебру B можно рассмотреть как градуированную, положив $A_0 = B$, $A_p = 0$ иначе.

Определение 11. Идеал $I \subset A$ градуированной алгебры называется *однородным*, если он имеет вид $\oplus_{p\geqslant 0} I_p$, где $I_p \subset A_p$ – подпространство.

По-другому, можно сказать, что I – однородный, если он порождён своими однородными элементами.

Пример 12.

1. $(x, y^3) \subset \mathbb{C}[x, y]$ – однородный идеал;
2. $(x+1) \subset \mathbb{C}[x]$ – не однородный идеал, так как однородные компоненты 1 и x элемента $1 + x \in I$ не лежат в I.

Лемма 13. *Идеал градуированной алгебры A, порождённый набором однородных элементов, однородный.*

Лемма 14. *Факторалгебра градуированной алгебры A по однородному идеалу I – градуированная алгебра.*

Доказательство.

$$A/I = \left(\bigoplus_p A_p\right) \Big/ \left(\bigoplus_p I_p\right) = \bigoplus_p (A_p/I_p).$$

□

Следствие 15. *Симметрическая алгебра $S^\bullet V$ градуированная.*

Доказательство. Идеал I, порождённый однородными элементами $v \otimes u - u \otimes v \in T^2 V$, градуированный. □

Обозначим однородную компоненту $S^\bullet V$ через $S^p V$. Это образ $T^p V$ при проекции $\pi\colon T^\bullet V \to S^\bullet V$. Чтобы его явно описать, заметим, что однородная компонента идеала I есть подпространство $I_p \subset T^p V$, порождённое тензорами вида $\ldots\otimes v\otimes u\otimes\ldots - \ldots\otimes u\otimes v\otimes\ldots$ (два элемента отличаются перестановкой v и u). Поэтому

$$S^p V = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} / \langle \ldots \otimes v \otimes u \otimes \ldots - \ldots \otimes u \otimes v \otimes \ldots \rangle.$$

Определение 16. Пространство S^pV называется p-й *симметрической степенью* пространства V.

Обозначим элемент $\pi(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) \in S^pV$ через $v_1 \cdot \ldots \cdot v_p$. Такие элементы называются *разложимыми*, они порождают симметрическую степень.

Предложение 17. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в V. Тогда имеется изоморфизм*

$$S^\bullet V \to \mathsf{k}[e_1, \ldots, e_n]$$

симметрической алгебры V и алгебры многочленов от переменных e_i.

Доказательство. Рассмотрим отображение $V \to \mathsf{k}[e_1, \ldots, e_n]$, переводящее линейную комбинацию векторов e_i в соответствующий линейный многочлен. Ясно, что оно будет обладать универсальным свойством и поэтому $S^\bullet V \cong \mathsf{k}[e_1, \ldots, e_n]$. □

Таким образом, $S^\bullet V^*$ – алгебра многочленов на пространстве V.

Следствие 18. *Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис в V, то в S^pV есть базис $e_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot e_n^{a_n}$, где $\sum a_i = p$.*

Аналогично симметрической алгебре определяется и внешняя, только соотношения коммутирования надо заменить на соотношения антикоммутирования.

Пусть J – двусторонний идеал в $T^\bullet V$, порождённый всевозможными элементами

$$v \otimes u + u \otimes v \in T^2V.$$

Определение 19. Определим *внешнюю алгебру* векторного пространства $\Lambda^\bullet V$ как факторалгебру $T^\bullet V/J$.

Так же, как и симметрическая алгебра, внешняя алгебра $\Lambda^\bullet V$ градуированная – потому, что идеал J порождён однородными элементами $v \otimes u + u \otimes v \in T^2V$ и стало быть, градуирован.

Пусть π – проекция $T^\bullet V \to \Lambda^\bullet V$. Сквозное отображение $V \xrightarrow{\sigma} T^\bullet V \xrightarrow{\pi} \Lambda^\bullet V$ будем также обозначать через σ. Ясно, что элементы вида $\sigma(v), v \in V$ в $\Lambda^\bullet V$ антикоммутируют друг с другом: антикоммутаторы $u \otimes v + v \otimes u$ лежат в идеале J. Разумеется, это не означает, что вся внешняя алгебра кососкоммутативна. Правильное свойство тут такое: она суперкоммутативна, т.е. она градуирована и её однородные элементы степеней p и q коммутируют, если p или q чётно, и антикоммутируют, если и p, и q нечётны.

Внешняя алгебра также обладает универсальным свойством – это универсальная ассоциативная суперкоммутативная алгебра с единицей, порождённая V в степени 1, мы не будем углубляться в подробности.

Обозначим однородную компоненту $\Lambda^\bullet V$ через Λ^pV, это образ T^pV при проекции $\pi\colon T^\bullet V \to \Lambda^\bullet V$. Так же, как и для симметрического случая, убедимся, что

$$\Lambda^pV = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} / \langle \ldots \otimes v \otimes u \otimes \ldots + \ldots \otimes u \otimes v \otimes \ldots \rangle.$$

Определение 20. Пространство Λ^pV называется p-й *внешней степенью* пространства V. Его элементы называется *p-векторами.*

Обозначим элемент $\pi(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) \in S^pV$ через $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$. Такие p-векторы называются *разложимыми*, они порождают внешнюю степень.

Предложение 21. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в V. Тогда имеется изоморфизм*

$$\Lambda^\bullet V \to \mathsf{k}\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$$

внешней алгебры V и алгебры косых многочленов от переменных e_i.

Доказательство. Аналогично доказательству для симметрической алгебры, с использованием универсального свойства. □

Таким образом, $\Lambda^\bullet V^*$ – алгебра косых многочленов на пространстве V.

Следствие 22. *Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис в V, то в $\Lambda^p V$ есть базис, состоящий из элементов $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$ – набор возрастающих индексов. В частности, при $p > \dim V$ имеем $\Lambda^p V = 0$.*

Симметрические и внешние степени векторного пространства, как мы их сейчас определили, являются факторами тензорной степени по соотношениям коммутативности и антикоммутативности. Однако есть другой, не менее важный подход, при котором симметрическая и внешняя степень реализуются как подмножества (а не фактормножества) в множестве всех тензоров. Это подмножества симметрических и кососимметрических тензоров относительно перестановок сомножителей.

Определим действие группы перестановок S_p на тензорной степени $T^p V$ формулой

$$\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_p) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(p)}$$

для любого $\sigma \in S_p$. Несложно видеть, что это действительно будет действие, т.е. $(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x))$ для всех $\sigma, \tau \in S_p$ (для этого в формуле стоит σ^{-1} вместо σ – иначе получится правое действие).

Определение 23. Тензор $x \in T^p V$ называется *симметрическим*, если $\sigma(x) = x$ для любого $\sigma \in S_p$. Тензор $x \in T^p V$ называется *антисимметрическим* или *кососимметрическим*, если $\sigma(x) = (-1)^\sigma x$ для любого $\sigma \in S_p$, где $(-1)^\sigma$ обозначает чётность перестановки.

Пример 24. Пусть $p = 2$. Транспозиция $(1, 2) \in S_2$ переводит $x \otimes y$ в $y \otimes x$, а $y \otimes x$ – в $x \otimes y$. Поэтому $x \otimes y + y \otimes x$ и $x \otimes x$ – симметрические тензоры, а $x \otimes y - y \otimes x$ – кососимметрический.

Обозначим через $ST^p V \subset T^p V$ множество симметрических тензоров, а через $\Lambda T^p V \subset T^p V$ – множество кососимметрических тензоров.

Имеются сквозные отображения

$$ST^p V \hookrightarrow T^p V \twoheadrightarrow S^p V; \qquad \Lambda T^p V \hookrightarrow T^p V \twoheadrightarrow \Lambda^p V.$$

Наша цель – доказать, что в случае поля характеристики ноль это изоморфизмы. Т.е., симметрическую степень можно реализовать как множество симметрических тензоров, а внешнюю степень – как множество кососимметрических тензоров. Рассуждения аналогичны в обоих случаях, мы проведём их для внешней степени. Конструкция изоморфизма для симметрической степени отличается только отсутствием знаков минус в формулах.

Определим оператор альтернирования (или кососимметризации) на тензорах: для $x \in T^p V$ положим

$$\mathrm{Alt}(x) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \sigma(x).$$

Очевидно, что для кососимметрического тензора x имеем $\mathrm{Alt}(x) = x$. Кроме того, видно, что тензор вида $\mathrm{Alt}(x)$ всегда кососимметрический. Отсюда вытекает

Лемма 25. $\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$.

Отображения p, для которых $p \circ p = p$, называют *проекторами*. С любым линейным проектором $p\colon W \to W$ на векторном пространстве связано разложение W в прямую сумму $W = \operatorname{im} p \oplus \ker p$, при этом p неподвижно действует на элементах $\operatorname{im} p$, т.е. осуществляет проекцию W на $\operatorname{im} p$. Мы видим, что кососимметрические тензоры – это в точности тензоры вида $\mathrm{Alt}(x)$ и оператор альтернирования осуществляет проекцию всех тензоров на кососимметрические.

Предложение 26. *Композиция вложения $\Lambda T^pV \hookrightarrow T^pV$ и проекции $\pi\colon T^pV \twoheadrightarrow \Lambda^pV$ – изоморфизм.*

Доказательство. Построим обратное отображение $\rho\colon \Lambda^pV \to \Lambda T^pV$. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} J_p \subset T^pV \arrow[rr, "\mathrm{Alt}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \Lambda T^pV \subset T^pV \\ & \Lambda^pV. \arrow[ur, dashed, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Здесь J_p – подпространство, порождённое всеми тензорами вида $\ldots\otimes v\otimes u\otimes\ldots+\ldots\otimes u\otimes v\otimes\ldots \subset T^pV$, так что $\Lambda^pV = T^pV/J_p$. Заметим, что $\mathrm{Alt}(J_p) = 0$. Действительно, J_p порождено элементами вида $x + \tau(x)$, где $x = \ldots \otimes v \otimes u \otimes$, а $\tau = (i, i+1)$ – транспозиция. Получаем $\mathrm{Alt}(x) = -\mathrm{Alt}(\tau(x))$ и $\mathrm{Alt}(x + \tau(x)) = 0$. Раз Alt обращается в ноль на подпространстве $J_p \subset T^pV$, он пропускается через фактор $\Lambda^pV = T^pV/J_p$. Т.е., существует отображение $\rho\colon \Lambda^pV \to \Lambda T^pV$ такое, что $\rho\pi = \mathrm{Alt}$.

Проверим, что $\pi\rho = \mathrm{id}$ на Λ^pV. Для элемента $\pi(x) \in \Lambda^pV$ имеем $\pi\rho\pi(x) = \pi\,\mathrm{Alt}(x) = \pi(x)$, докажем последнее равенство. Действительно, для $x = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$ и $\sigma \in S_p$ имеем

$$\pi\,\mathrm{Alt}(x) = \pi\left(\frac{1}{p!}\sum_\sigma (-1)^\sigma \sigma(x)\right) = \frac{1}{p!}\sum_\sigma (-1)^\sigma \pi(\sigma(x)) = \frac{1}{p!}\sum_\sigma (-1)^\sigma \pi(v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\sigma^{-1}(p)}) =$$
$$= \frac{1}{p!}\sum_\sigma (-1)^\sigma (v_{\sigma^{-1}(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma^{-1}(p)}) = \frac{1}{p!}\sum_\sigma v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = \pi(x).$$

Проверим, что $\rho\pi = \mathrm{id}$ на антисимметрических тензорах, т.е. тензорах вида $\mathrm{Alt}(x)$. Имеем $\rho\pi\,\mathrm{Alt}(x) = \rho\pi(x) = \mathrm{Alt}(x)$. $\square$

Таким образом, мы построили вложение ρ пространства Λ^pV в T^pV как подмножество антисимметрических тензоров. Обычно элементы Λ^pV отождествляют с соответствующими тензорами. Явно это соответствие устроено так: для разложимого p-вектора

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = \mathrm{Alt}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p).$$

Например,

$$x \wedge y = \frac{1}{2}(x \otimes y - y \otimes x).$$

Заметим ещё, что умножение на внешних степенях мы получили автоматически – внешняя алгебра была построена как факторалгебра тензорной. Если же определять внешнюю степень пространства через кососимметрические тензоры, то нужно дополнительно задавать на них внешнее умножение – оно не совпадает с тензорным умножением. Иными словами, набор вложений $\rho\colon \Lambda^pV \to T^pV$ не будет гомоморфизмом алгебр. Внешнее умножение, перенесённое с Λ^pV на ΛT^pV, имеет вид $x \wedge y = \mathrm{Alt}(x \otimes y)$.

Наконец, вычислим двойственное пространство к внешней степени.

Здесь нам пригодится

Лемма 27. *Пусть между конечномерными пространствами V и U задано* невырожденное спаривание, *т.е. билинейное отображение $\langle -,- \rangle \colon V \times U \to \mathsf{k}$ такое, что $\forall v \in V$ отображение $\langle v,- \rangle \colon U \to \mathsf{k}$ не равно нулю и $\forall u \in U$ отображение $\langle -,u \rangle \colon V \to \mathsf{k}$ не равно нулю. Тогда $U \cong V^*$.*

Доказательство. Очевидно, имеются инъективные вложения $V \to U^* : v \mapsto \langle v,- \rangle$ и $U \to V^*$. Значит, $\dim U = \dim V$ и это изоморфизмы. □

Предложение 28. $(\Lambda^p V)^* \cong \Lambda^p(V^*)$.

Доказательство. Рассмотрим невырожденное каноническое спаривание

$$T^p(V) \times T^p(V^*) \to k,$$

оно задаётся формулой

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p, f_1 \otimes \ldots \otimes f_p) \mapsto f_1(v_1) \cdot \ldots \cdot f_p(v_p).$$

Ограничим его на подпространства $\Lambda^p(V) \subset T^p(V)$ и $\Lambda^p(V^*) \subset T^p(V^*)$. Ограничение

$$\Lambda^p(V) \times \Lambda^p(V^*) \to k$$

снова невырождено, это можно проверить, записав его в координатах:

$$\langle e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_p} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{p!} & \text{при } (i_1, \ldots, i_p) = (j_1, \ldots, j_p); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отсюда с помощью леммы получаем, что $(\Lambda^p V)^* \cong \Lambda^p(V^*)$. □

Внешние степени – необходимая составляющая языка геометрии. Пример – следующее утверждение.

Предложение 29. *Имеется взаимно-однозначное соответствие между множеством p-мерных подпространств в векторном пространстве V и подмножеством в $\mathbb{P}(\Lambda^p V)$, состоящем из ненулевых разложимых p-векторов с точностью до умножения на константы.*

Доказательство. Соответствие устроено так: подпространство $U \subset V$ размерности p с базисом $e_1, \ldots, e_p$ переходит в разложимый вектор $e_1 \wedge \ldots \wedge e_p$. Замена базиса выражается в умножении p-вектора на определитель матрицы замены. □