Представления групп – 1

Напомним, что *группой* называется множество G с заданной на нём бинарной операцией $\cdot : G \times G \to G$ (умножением), удовлетворяющей свойствам:

1. $\forall x, y, z \in G\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (ассоциативность);

2. $\exists e \in G\ \forall x \in G\ x \cdot e = e \cdot x = x$ (наличие единицы);

3. $\forall x \in G\ \exists x^{-1} \in G\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ (существование обратного элемента).

Фиксируем поле k. Пусть V – векторное пространство над k. Через $GL(V)$ обозначают группу обратимых линейных операторов на V.

Определение 1. *Линейным представлением* группы G в пространстве V называется любой гомоморфизм групп $\rho\colon G \to GL(V)$. Размерностью представления называют размерность пространства V.

Иными словами, представление G в V – это семейство обратимых операторов $\rho(g), g \in G$, на V такое, что $\rho(e) = 1_V$ и при всех $g, h \in G$ имеем $\rho(g)\rho(h) = \rho(gh)$.

Пример 2. 1. У любой группы есть тривиальное представление в любом пространстве: $\rho(g) = 1_V$ при всех g.

2. Если G определена как подгруппа в $GL(V)$ (например, группа линейных преобразований, сохраняющих какую-нибудь фигуру в V), то тождественное отображение $G \to GL(V)$ задаёт представление G в V. Такое представление называется *тавтологическим.*

3. Чётность: сопоставление перестановке её знака определяет представление группы S_n в одномерном векторном пространстве.

4. Пусть группа G действует на множестве X, а $R(X)$ – функции на X со значениями в поле k. Определим представление G в пространстве $R(X)$ формулой (где $g \in G, f \in R(X), x \in X$)
$$(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1}(x)).$$
Здесь нужно брать g^{-1}, а не g, чтобы получить настоящий гомоморфизм $\rho\colon G \to GL(R(X))$, а не антигомоморфизм.

5. Пусть в предыдущем примере $X = V$ – это векторное пространство, а действие G на V – это линейное представление. Через $R(X)$ обозначим множество многочленов на V. Тогда формула из предыдущего пункта задаёт представление G в пространстве многочленов на V.

6. Ещё частный случай примера 4 – действие группы S_n в n-мерном векторном пространстве перестановками фиксированного базиса $e_1, \ldots, e_n$.

7. Пусть $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $V = \mathbb{R}^2$. Определим $\rho(\bar{a})$ как поворот V на $\frac{360a}{n}$ градусов относительно начала координат, это задаст двумерное представление G.

Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ – представление, а $U \subset V$ – векторное подпространство.

Определение 3. Подпространство U называется *инвариантным*, если оно сохраняется действием группы G на V, т.е. $\forall g \in G$ выполнено $\rho(g)(U) \subset U$.

Если $U \subset V$ – инвариантное подпространство в представлении, то ограничения операторов $\rho(g)$ на U задают представление G в пространстве U. Поэтому инвариантные подпространства также называют *подпредставлениями*.

Пример 4.

1. В примере 2.4 всегда есть инвариантное одномерное подпространство в $R(X)$, состоящее из постоянных функций. Если при этом множество X конечно, то есть также инвариантное подпространство $R_0(X) \subset R(X)$, образованное функциями с нулевой суммой.

2. В примере 2.5 в пространстве многочленов на X есть инвариантные подпространства, образованные многочленами фиксированной степени. Более того, $\mathsf{k}[V]$ разлагается в прямую сумму $\oplus_{d \geqslant 0} V_d$ инвариантных подпространств $V_d \subset \mathsf{k}[V]$, образованных однородными многочленами степени d.

3. Пусть $n = 3$ в примере 2.6. Тогда представление S_3 в k^3 распадается в прямую сумму инвариантных подпространств $\langle(1,1,1)\rangle$ и $H = \{(x,y,z) | x+y+z = 0\}$. Двумерное пространство H порождено векторами $v_1 = (2,-1,-1), v_2 = (-1,2,-1), v_3 = (-1,-1,2)$, причём $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. Эти вектора переставляются действием группы. Рассматривая их как вершины треугольника в H, получаем, что представление S_3 в H – это представление движениями плоскости, сохраняющими треугольник.

Определение 5. Говорят, что представление $\rho\colon G \to GL(V)$ разлагается в прямую сумму подпредставлений U_1 и U_2, если подпространства $U_1, U_2 \subset V$ инвариантны и $V = U_1 \oplus U_2$.

В примерах 4.2 и 4.3 мы видели примеры разложения в прямую сумму.

Определение 6. Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ и $\tau\colon G \to GL(U)$ – представления. Линейное отображение $f\colon V \to U$ называется *морфизмом представлений*, если оно согласовано с действием группы, т.е. $g \in G$

$$f \circ \rho(g) = \tau(g) \circ f.$$

Два представления называются *изоморфными*, если между ними есть морфизм, являющийся изоморфизмом векторных пространств.

Пример 7.

1. Для любого представления $\rho\colon G \to GL(V)$ скалярные операторы на V суть морфизмы $V \to V$.

2. Для двумерного представления $\rho\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to GL_2(\mathbb{R})$ поворотами вещественной плоскости любой поворот плоскости относительно 0 будет морфизмом из ρ в ρ (потому, что любые два поворота относительно 0 коммутируют). А осевая симметрия не будет морфизмом представлений (кроме тривиального случая $n = 2$, потому что не коммутирует с поворотами).

3. Пусть G – группа движений куба. Рассмотрим представление ρ группы G в пространстве многочленов $\mathbb{C}[x,y,z]$ (как в примере 2.5) и представление $\tau\colon G \to GL(\mathbb{C}^8)$ в пространстве комплексных функций на вершинах куба. Гомоморфизм ограничения $\mathbb{C}[x,y,z] \to \mathbb{C}^8$ (вычисление многочлена в вершинах куба) будет морфизмом представлений $\rho \to \tau$.

Лемма 8. *Пусть* $\rho\colon G \to GL(V)$ *и* $\tau\colon G \to GL(U)$ *– представления,* $f\colon V \to U$ *– морфизм. Тогда* $\ker f \subset V$ *и* $\operatorname{im} f \subset U$ *– подпредставления.*

Доказательство. Докажем для ядра. Пусть $v \in \ker f$, покажем, что $\forall g\ \rho(g)(v) \in \ker f$. Имеем

$$f(\rho(g)(u)) = \tau(g)(f(u)) = \tau(g)(0) = 0.$$

$\square$

Определение 9. Представление $\rho\colon G \to GL(V)$ называется *неприводимым*, если в V нет нетривиальных (т.е. отличных от 0 и V) инвариантных подпространств.

Предложение 10 (теорема Машке). *Пусть группа G конечна и порядок $|G| \neq 0$ в поле k. Тогда любое конечномерное представление G над k раскладывается в прямую сумму неприводимых.*

Доказательство. По существу, нужно показать, что у любого инвариантного подпространства $U \subset V$ есть инвариантное дополнительное подпространство U' (т.е. такое, что $U \oplus U' = V$). Зная это, можно раскладывать последовательно заданное представление на прямые слагаемые, пока все компоненты не станут неприводимы. Так как исходное представление конечномерно, процесс оборвётся.

Итак, пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ – представление и $U \subset V$ – инвариантное подпространство. Предположим, что удалось найти инвариантный проектор на U, т.е. такой морфизм представлений $p\colon V \to U$, что $p(u) = u$ при всех $u \in U$. Тогда возьмём $U' = \ker p$. Легко видеть, что $V = U \oplus U'$: если $u \in U \cap U'$, то $u = p(u) = 0$. С другой стороны, любой $v \in V$ имеет вид $v = p(v) + (v - p(v))$, где $p(v) \in U$, а $p(v - p(v)) = p(v) - p(v) = 0$, так что $v - p(v) \in U'$.

Теперь покажем, как построить инвариантный проектор. Возьмём любой проектор $p'\colon V \to U$, не обязательно инвариантный. Положим

$$p = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g)p'\rho(g^{-1}).$$

Проверим, что получился инвариантный проектор. Во-первых, образ p лежит в U, так как образ каждого слагаемого суммы лежит в U. Во-вторых, для $u \in U$ имеем

$$p(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g)p'\rho(g^{-1})(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g)\rho(g^{-1})(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u = u$$

(второе равенство выполнено потому, что $\rho(g^{-1})(u) \in U$). В-третьих, проверим, что p – морфизм.

$$\rho(h)p = \rho(h)\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g)p'\rho(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(h)\rho(g)p'\rho(g^{-1})\rho(h^{-1})\rho(h) =$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(hg)p'\rho((hg)^{-1})\rho(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g)p'\rho(g^{-1})\rho(h) = p\rho(h).$$

$\square$

Предложение показывает, что изучение представлений по сути сводится к изучению неприводимых представлений.

Предложение 11 (Лемма Шура). *Пусть $\rho\colon G \to V$ и $\tau\colon G \to U$ – неприводимые представления, а $f: V \to U$– морфизм. Тогда*

1. *Если U и V не изоморфны, то $f = 0$.*
2. *Если U и V изоморфны, то f – изоморфизм или $f = 0$.*
3. *Если $U = V$ и основное поле k алгебраически замкнуто, то f – умножение на скаляр $\lambda \in \mathsf{k}$.*

Доказательство. 1. Заметим, что имеются подпредставления $\ker f \subset V$ и $\operatorname{im} f \subset U$. Так как U и V неприводимы, эти подпредставления тривиальны. Если $\ker f = V$ или $\operatorname{im} f = 0$, то $f = 0$. Если же $\ker f = 0$ и $\operatorname{im} f = U$, то f – изоморфизм. Тем самым также доказано 2.

3. Так как поле алгебраически замкнуто, у f есть собственный вектор $v \in V$ с собственным значением λ. Рассмотрим морфизм представлений $f' = f - \lambda\colon V \to V$. Его ядро содержит v и потому ненулевое, по доказанному $\ker f' = V$ и $f' = 0$, значит $f = \lambda$. $\square$

Теперь выясним, насколько единственно разложение представления в прямую сумму неприводимых. В буквальном смысле оно не единственно – если взять тривиальную группу, то неприводимыми представлениями будут одномерные векторные пространства, а разложение пространства в прямую сумму одномерных подпространств вовсе не единственно.

Однако, разложение становится единственным, если сгруппировать в нём изоморфные слагаемые.

Определение 12. Пусть $V = \oplus_i V_i$ – разложение представления в прямую сумму неприводимых. Пусть $\rho\colon G \to GL(U)$ – произвольное неприводимое представление. Положим

$$V^{(\rho)} = \bigoplus_{V_i \cong U} V_i,$$

т.е. $V^{(\rho)}$ – сумма тех слагаемых исходного разложения, которые изоморфны ρ. Подпредставление $V^{(\rho)} \subset V$ называется *изотипической компонентой.*

Ясно, что $V = \oplus_\rho V^{(\rho)}$, где ρ пробегает множество классов изоморфизма неприводимых представлений. Это разложение называется *изотипическим*, оно a priori зависит от исходного разложения $V = \oplus_i V_i$, но в действительности от него не зависит.

Предложение 13. 1. *Пусть $V = \oplus_\rho V^{(\rho)}$ и $U = \oplus_\rho U^{(\rho)}$ – два изотипических разложения, а $f\colon V \to U$ – морфизм представлений. Тогда $f(V^{(\rho)}) \subset U^{(\rho)}$.*

2. *Изотипическое разложение определено однозначно.*

Доказательство. 1. Пусть ρ и τ – неизоморфные неприводимые представления. Рассмотрим композицию

$$V^{(\rho)} \to V \xrightarrow{f} U \to U^{(\tau)},$$

где крайние отображения – вложения и проекция прямых слагаемых. Она равна 0 по лемме Шура. Значит, $f(V^{(\rho)})$ переходит в ноль при проекции на все изотипические слагаемые в $\oplus_\tau U^{(\tau)}$, кроме $U^{(\rho)}$, и поэтому $f(V^{(\rho)}) \subset U^{(\rho)}$.

2. Пусть есть два изотипических разложения $V = \oplus_\rho V^{(\rho)}$ и $V = \oplus_\rho \tilde{V}^{(\rho)}$, применим пункт 1 к тождественному отображению $V \to V$. Получим, что $V^{(\rho)} \subset \tilde{V}^{(\rho)}$ и $\tilde{V}^{(\rho)} \subset V^{(\rho)}$, значит $V^{(\rho)} = \tilde{V}^{(\rho)}$. $\square$

Естественная задача теории представлений – описать все неприводимые представления заданной группы над заданным полем. Следующий факт играет здесь важнейшую роль.

Предложение 14. *Пусть поле* k *алгебраические замкнуто, а группа* G *конечная, и порядок* G *не равен нулю в* k*. Тогда*

1. *Количество классов изоморфизма неприводимых представлений* G *над* k *равно числу классов сопряжённости в группе* G*;*

2. *Если* $V_1, \ldots, V_n$ *– все неприводимых представления* G *над* k *с точностью до изоморфизма, то*
$$\sum_{i=1}^{n} (\dim V_i)^2 = |G|.$$

Докажем эти факты мы в следующий раз, а сейчас посмотрим, как они работают, на простом примере.

Пример 15. Пусть $G = S_3$. В G есть 3 класса сопряжённости элементов:
$$\{e\}, \{(1,2), (1,3), (2,3)\}, \{(1,2,3), (1,3,2)\}.$$

Значит, над $\mathbb{C}$ есть ровно три неприводимых представления S_3. Пусть d_1, d_2, d_3 – их размерности. Тогда $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6$. Значит, $d_1 = d_2 = 1, d_3 = 2$. Действительно, такие неприводимые представления S_3 нам уже известны: это тривиальное, чётность (одномерные) и представление движениями треугольника на плоскости (двумерное). Согласно теории, других неприводимых представлений нет.