Представления групп – 2: пространства морфизмов и ортогонализация

Проще всего устроены одномерные представления групп, т.е. гомоморфизмы $G \to \mathsf{k}^*$ в мультипликативную группу поля, которая абелева.

Определение 1. *Коммутатором* двух элементов g, h группы называется элемент

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Он измеряет, коммутируют ли g и h: $gh = hg \Leftrightarrow [g, h] = e$.

Определение 2. *Коммутантом* группы G называется подгруппа, порождённая всеми коммутаторами. Обозначение: $[G, G]$ или G'.

Коммутант – нормальная подгруппа, так как множество коммутаторов инвариантно относительно сопряжений: $s[g, h]s^{-1} = [sgs^{-1}, shs^{-1}]$. Очевидно, факторгруппа по коммутанту – абелева группа.

Предложение 3. *Канонический гомоморфизм $G \to G/G'$ – универсальный гомоморфизм из G в абелеву группу, т.е. для любого гомоморфизма $f\colon G \to A$ в абелеву группу существует единственный гомоморфизм $f'\colon G/G' \to A$, делающий коммутативной диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & A. \\
& G/G' \arrow[ur, dashed, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Единственность следует из того, что $G \to G/G'$ сюръективно. Существование следует из того, что $f([g, h]) = [f(g), f(h)] = e$ и поэтому $f(G') = e$. □

Таким образом, гомоморфизмы из группы G в абелеву группу A соответствуют гомоморфизмам из G/G' в A. Применяя это к $A = \mathsf{k}^*$, получим, что одномерные представления группы G соответствуют одномерным представлениям абелевой группы G/G', которые для конечных групп легко описать.

Пример 4. Пусть $G = S_n$, тогда $G' = A_n$ и $G/G' = S_n/A_n = \{\pm 1\}$. Значит, у S_n есть ровно два одномерных представления – тривиальное и чётность.

Одномерные представления любой группы сводятся к представлениям абелевой группы. Обратно, представления абелевых групп по существу одномерны.

Предложение 5. *Любое неприводимое представление абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем одномерно.*

Доказательство. Воспользуемся формулами с прошлой лекции. Во-первых, классы сопряжённости в абелевой группе – это сами элементы, их $n = |G|$. Значит, есть ровно n неприводимых представлений, пусть $d_1, \ldots, d_n$ – их размерности. Тогда $\sum_{i=1}^n d_i^2 = n$, и значит все $d_i = 1$. □

Для доказательства формул с прошлой лекции нам понадобится изучить пространства морфизмов между представлениями.

Определение 6. Пусть V, U – представления группы G. Обозначим через $\mathrm{Hom}^G(V,U)$ множество морфизмов представлений из V в U. Множество эндоморфизмов (т.е. морфизмов в себя) $\mathrm{Hom}^G(V,V)$ будем обозначать $\mathrm{End}^G(V)$.

Очевидно, $\mathrm{Hom}^G(V,U)$ – векторное подпространство в $\mathrm{Hom}(V,U)$, а $\mathrm{End}^G(V)$ – подалгебра в $\mathrm{End}(V)$ (умножение в этой алгебре – композиция операторов).

Далее (при изучении пространств морфизмов) мы будем считать, что **основное поле k алгебраически замкнуто, группа G конечна и её порядок $|G| \neq 0$ в k. Все представления будут считаться конечномерными.**

Напомним лемму Шура:

Лемма 7. *Пусть V, U – неприводимые представления. Тогда*

1. $\mathrm{Hom}^G(V,U) = 0$ *если V и U неизоморфны;*
2. $\mathrm{End}^G(V) = \mathsf{k}$.

Лемма 8. *Пусть V и U – представления. Тогда*

$$\mathrm{Hom}^G(V^{\oplus n}, U^{\oplus m}) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathrm{Hom}^G(V,U)).$$

На (i,j) месте стоит морфизм из j-го слагаемого V в i-е слагаемое U. Матричные обозначения удобны: вычисление морфизма на n-наборе из элементов V – умножение столбца на матрицу, а композиция морфизмов – умножение матриц.

Из этих двух лемм вытекает

Следствие 9. *Пусть $V = \oplus_\rho V^{(\rho)}$ и $U = \oplus_\rho U^{(\rho)}$ – представления, разложенные на изотипические компоненты. Пусть $V^{(\rho)} = V_\rho^{\oplus n_\rho}$ и $U^{(\rho)} = V_\rho^{\oplus m_\rho}$ – разложения на неприводимые представления. Иными словами, V и U – представления типов (n_ρ) и (m_ρ). Тогда*

$$\mathrm{Hom}^G(V,U) \cong \bigoplus_\rho \mathrm{Mat}_{m_\rho\times n_\rho}(\mathsf{k}).$$

Доказательство.

$$\mathrm{Hom}^G(V,U) \cong \bigoplus_{\rho,\tau} \mathrm{Hom}^G(V^{(\rho)}, U^{(\tau)}) \cong \bigoplus_{\rho,\tau} \mathrm{Hom}^G(V_\rho^{\oplus n_\rho}, V_\tau^{\oplus m_\tau}) \cong$$
$$\cong \bigoplus_{\rho,\tau} \mathrm{Mat}_{m_\tau\times n_\rho}(\mathrm{Hom}^G(V_\rho, V_\tau)) \cong \bigoplus_\rho \mathrm{Mat}_{m_\rho\times n_\rho}(\mathsf{k}).$$

□

Следствие 10. *В тех же обозначениях*

$$\dim_{\mathsf{k}} \mathrm{Hom}^G(V,U) = \sum_\rho m_\rho n_\rho.$$

Определение 11. *Регулярным представлением* группы G над k называется представление ρ_{reg} в векторном пространстве $R = \oplus_{g\in G}\mathsf{k}e_g$ размерности $|G|$, заданное формулой

$$\rho_{reg}(g)(e_h) = e_{gh}.$$

Предложение 12. *Для любого представления* $\rho\colon G \to GL(V)$ *имеем*

$$\mathrm{Hom}^G(R, V) \cong V.$$

Доказательство. Пусть $v \in V$ – произвольный вектор. Определим морфизм представлений $f_v\colon R \to V$:

$$f_v(e_g) = \rho(g)v.$$

Несложно видеть, что это действительно морфизм и что любой морфизм имеет такой вид. □

Следствие 13. *Разложение регулярного представления на неприводимые имеет вид*

$$R \cong \bigoplus_\rho V_\rho^{\oplus \dim V_\rho},$$

где сумма берётся по всем классам неприводимых представлений V_ρ.

Доказательство. Пусть $R \cong \bigoplus_\rho V_\rho^{\oplus d_\rho}$ – разложение на неприводимые слагаемые, где сумма берётся по всем классам неприводимых представлений (и степени, возможно, нулевые). Для каждого ρ вычислим двумя способами размерность $\mathrm{Hom}^G(R, V_\rho)$. Во-первых,

$$\dim \mathrm{Hom}^G(R, V_\rho) = \dim V_\rho$$

по предыдущему предложению. Во-вторых,

$$\dim \mathrm{Hom}^G(R, V_\rho) = \dim \mathrm{Hom}^G(\oplus_\tau V_\tau^{\oplus d_\tau}, V_\rho) = d_\rho$$

по доказанной общей формуле. Приравнивая, получаем $d_\rho = \dim V_\rho$, что и нужно. □

Таким образом, любое неприводимое представление входит в разложение регулярного с ненулевой кратностью. Получаем

Следствие 14. *Множество классов изоморфизма неприводимых представлений конечно.*

Теперь докажем первую из формул с прошлой лекции.

Предложение 15. *Если* $V_1, \dots, V_k$ *– все неприводимые представления группы* G *над* k *с точностью до изоморфизма, то*

$$\sum_{i=1}^k (\dim V_i)^2 = |G|.$$

Доказательство. Пусть $R \cong \oplus_i V_i^{\oplus d_i}$. По доказанному выше

$$|G| = \dim R = \dim \mathrm{Hom}^G(R, R) = \sum_i d_i^2 = \sum_i (\dim V_i)^2.$$

□

Для доказательства второй формулы с прошлой лекции нам понадобится узнать, как устроено умножение в алгебре $\mathrm{Hom}^G(R, R)$.

Определение 16. *Групповой алгеброй* группы G над полем k называется векторное пространство $\mathsf{k}G = \oplus_{g \in G} \mathsf{k} e_g$ с умножением, заданным на базисных элементах правилом $e_g \cdot e_h = e_{gh}$.

Это ассоциативная k-алгебра с единицей e_e, она коммутативна тогда и только тогда, как группа G абелева.

Следующий очевидный факт очень важен.

Предложение 17. *Левые модули над алгеброй* $\mathsf{k}G$ *– это то же самое, что представления группы* G *над* k.

При соответствии между представлениями группы G и модулями над $\mathsf{k}G$ регулярному представлению отвечает $\mathsf{k}G$ как левый модуль над собой. Это позволяет посчитать эндоморфизмы регулярного представления.

Определение 18. Пусть A – алгебра. *Противоположной алгеброй* к A называется алгебра A^{op}, которая как векторное пространство совпадает с A, а умножение производится в другом порядке: $a \cdot_{op} b := b \cdot a$.

Лемма 19. *Пусть* A *– ассоциативная алгебра с единицей, а* ${}_lA$ *обозначает* A*, рассмотренную как левый модуль над собой. Тогда* $\mathrm{Hom}_A({}_lA, {}_lA)$ *(алгебра эндоморфизмов* ${}_lA$ *как левого* A*-модуля) изоморфна* A^{op}*.*

Доказательство. Ясно, что любой гомоморфизм модулей $f\colon {}_lA \to {}_lA$ определяется элементом $a = f(1)$ и имеет вид $f(x) = xa$. Если для двух гомоморфизмов $f(1) = a$ и $g(1) = b$, то для композиции имеем

$$(fg)(1) = f(g(1)) = f(b) = ba,$$

т.е. умножение гомоморфизмов переходит в умножение элементов в обратном порядке. □

Лемма 20. $(\mathsf{k}G)^{op} \cong \mathsf{k}G$.

Доказательство. Изоморфизм $\mathsf{k}G \to (\mathsf{k}G)^{op}$ устроен так: $e_g \mapsto e_{g^{-1}}$. □

Следствие 21. *Алгебра эндоморфизмов регулярного представления* $\mathrm{End}^G(R, R)$ *изоморфна групповой алгебре* $\mathsf{k}G$*.*

Определение 22. *Центром* алгебры A называется множество

$$Z(A) = \{z \in A \mid \forall a \in A \ az = za\}.$$

Очевидно, центр содержит скаляры и является подалгеброй в A.

Лемма 23. *Центр алгебры матриц над полем состоит из диагональных матриц:*

$$Z(M_n(\mathsf{k})) = \mathsf{k} \cdot E.$$

Теперь докажем вторую формулу с прошлой лекции.

Предложение 24. *Количество классов изоморфизма неприводимых представлений группы* G *равно числу классов сопряжённости элементов в* G*.*

Доказательство. Для доказательства вычислим двумя способами размерность центра алгебры эндоморфизмов регулярного представления. Во-первых, $\mathrm{End}^G(R,R) \cong \oplus_\rho M_{d_\rho}(\mathsf{k})$, поэтому

$$Z(\mathrm{End}^G(R,R)) = \oplus_\rho Z(M_{d_\rho}(\mathsf{k})) = \oplus_\rho \mathsf{k},$$

откуда $\dim Z(\mathrm{End}^G(R,R))$ равна числу неприводимых представлений.

С другой стороны, $\mathrm{End}^G(R,R) \cong \mathsf{k}G$, вычислим центр групповой алгебры. Пусть $x = \sum_g x_g e_g \in \mathsf{k}G$ – элемент, $x_g \in \mathsf{k}$. Тогда x лежит в центре титтк $xe_h = e_h x$ при всех h, что равносильно $e_h x e_{h^{-1}} = x$. При этом

$$e_h x e_{h^{-1}} = e_h(\sum_g x_g e_g)e_{h^{-1}} = \sum_g x_g e_h e_g e_{h^{-1}} = \sum_g x_g e_{hgh^{-1}} = \sum_g x_{h^{-1}gh} e_g.$$

Получаем, что $x \in Z \Leftrightarrow x_g = x_{h^{-1}gh}$ при всех g и h. Это значит, что x_g как функция на группе принимает равные значения на сопряжённых элементах, т.е. постоянна на классах сопряжённости. Размерность пространства таких функций x_g равна числу классов сопряжённости, это доказывает предложение. □

Так же, как и для векторных пространств, для представлений можно определить двойственное представление, тензорное произведение и Hom.

Определение 25. Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ – представление группы G. Определим *двойственное представление* ρ^* в пространстве V^* формулой

$$\rho^*(g) = (\rho(g^{-1}))^*.$$

Степень -1 нужна для того, чтобы ρ^* было гомоморфизмом, а не антигомоморфизмом:

$$\rho^*(gh) = (\rho((gh)^{-1}))^* = (\rho(h^{-1}g^{-1}))^* = (\rho(h^{-1})\rho(g^{-1}))^* = (\rho(g^{-1}))^*(\rho(h^{-1}))^* = \rho^*(g)\rho^*(h).$$

Более общая конструкция – представление в пространстве гомоморфизмов.

Определение 26. Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ и $\tau\colon G \to GL(U)$– представления группы G. Определим представление $\mathrm{Hom}(\rho,\tau)$ группы G в пространстве $\mathrm{Hom}(V,U)$ формулой

$$\mathrm{Hom}(\rho,\tau)(g)(f) = \tau(g) f \rho(g^{-1})$$

(где $f \in \mathrm{Hom}(V,U)$).

Если в качестве τ взять тривиальное одномерное представление, получим ρ^*.

Заметим также, что неподвижные элементы в представлении $\mathrm{Hom}(V,U)$ – это в точности морфизмы представлений $V \to U$.

Определение 27. Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ и $\tau\colon G \to GL(U)$– представления группы G над k. Определим $\rho \otimes \tau$ – *тензорное произведение* представлений V и U – как представление группы G в пространстве $V \otimes_{\mathsf{k}} U$, заданное формулой

$$(\rho \otimes \tau)(g) = \rho(g) \otimes \tau(g).$$

Пример 28. Пусть представления ρ и τ одномерны, т.е. это гомоморфизмы $G \to \mathsf{k}^*$. Тогда $\rho^*(g) = 1/\rho(g)$ – это «поэлементно» обратная функция, а $(\rho \otimes \tau)(g) = \rho(g)\tau(g)$ – «поэлементное» произведение. В частности, имеем $\rho \otimes \rho^* = 1$. Таким образом, одномерные представления (точнее, классы их изоморфизма) образуют группу относительно тензорного умножения.

Многие группы определяются как группы движений, сохраняющих некоторое множество. То, что рассматривают именно движения, а не вообще все аффинные преобразования, не случайно: любое представление конечной группы в вещественном пространстве – представление движениями относительно подходящей метрики.

Определение 29. Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ – представление группы G в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$. Билинейная форма $(-,-)$ на V называется *инвариантной*, если все операторы $\rho(g)$ ортогональны относительно неё, т.е.

$$\forall v, u \in V \qquad (\rho(g)v, \rho(g)u) = (v, u).$$

Предложение 30. *Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ – представление конечной группы G в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$. Тогда на V существует инвариантное скалярное произведение.*

Доказательство. Идея доказательства – взять любое скалярное произведение и усреднить. Пусть $(-,-)$ – произвольное скалярное произведение на V, положим

$$\langle v, u\rangle = \sum_{g\in G}(\rho(g)v, \rho(g)u).$$

Очевидно, форма $\langle -,-\rangle$ будет инвариантной. Также ясно, что эта форма симметрична (т.к. $(-,-)$ симметрична) и форма $\langle v, v\rangle$ положительно определена (т.к. все слагаемые $(\rho(g)v, \rho(g)v)$ положительно определены). $\square$

Таким образом, любое вещественное представление ортогонализуется.

Для комплексных представлений буквально такое же утверждение неверно. А доказательство не будет работать потому, что сумма невырожденных билинейных форм может быть вырожденной. Говорить же о положительно определённых билинейных формах на комплексных пространствах не приходится: если $(v, v) > 0$, то $(iv, iv) = i^2(v, v) = -(v, v) < 0$, и таких форм просто не бывает.

Чтобы говорить об инвариантной форме на комплексном представлении (а также для многих других целей) нужно рассматривать не билинейные, а полуторалинейные формы.

Определение 31. Пусть V, U – векторные пространства над $\mathbb{C}$. Отображение $f\colon V \to U$ называется *антилинейным*, если $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in V$ и $f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$ для $\lambda \in \mathbb{C}$.

Определение 32. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{C}$. Отображение $(-,-)\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой*, если $\forall v \in V$ отображение $(-, v)\colon V \to \mathbb{C}$ линейно, а отображение $(v, -)\colon V \to \mathbb{C}$ антилинейно.

Определение 33. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{C}$. Полуторалинейная форма *эрмитова*, если $\forall v, u \in V$ имеем $(v, u) = \overline{(u, v)}$.

Со всякой полуторалинейной эрмитовой формой связана квадратичная эрмитова форма $v \mapsto (v, v)$. Очевидно, она принимает вещественные значения. Эрмитова форма $(-,-)$ называется *положительно определённой* (или *эрмитовым скалярным произведением*), если $(v, v) > 0$ при $v \neq 0$.

Пусть (e_i) – базис в V. Полуторалинейная форма в координатах записывается так:

$$(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j) = \sum x_i \bar{y}_j (e_i, e_j).$$

Матрицей Грама полуторалинейной формы называется матрица $G_{ij} = (e_i, e_j)$. Форма эрмитова титтк $G^T = \bar{G}$. Отсюда видно, что эрмитовы формы существуют: достаточно задать в выбранном базисе форму единичной матрицей Грама. Соответствующая квадратичная форма будет $\sum x_i \bar{x}_i = \sum |x_i|^2$, эта форма положительно определена.

Эрмитовы формы устроены так же, как симметрические билинейные формы над $\mathbb{R}$. Для них работает процесс Грама-Шмидта, любая форма приводится к диагональному виду с коэффициентами ± 1 и 0, корректно определена сигнатура формы.

Определение 34. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{C}$ с эрмитовым скалярным произведением. Оператор $A\colon V \to V$ называется *унитарным*, если для всех $v, u \in V$ выполнено $(Av, Au) = (v, u)$.

Запишем условие унитарности в матричном виде. Если v и u – векторы-столбцы, G – матрица Грама, то $(v, u) = v^T G \bar{u}$, а $(Av, Au) = (Av)^T G \overline{(Au)} = v^T A^T G \bar{A} \bar{u}$. Итак, A унитарен титтк

$$G = A^T G \bar{A}.$$

Для $G = E$ это принимает вид $A^{-1} = \bar{A}^T$.

Предложение 35. *Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ – представление конечной группы G в векторном пространстве V над $\mathbb{C}$. Тогда на V существует инвариантное эрмитово скалярное произведение.*

Доказательство. Аналогично вещественному случаю. □