# Представления групп – 3: характеры

Изучение представлений (описание неприводимых представлений, разложение представления на неприводимые и т.п.) можно свести к изучению их характеров – специальных функций, определённых на группе.

Будем обозначать множество функций $G \to \mathsf{k}$ через $\mathsf{k}[G]$. Имеется биекция между $\mathsf{k}[G]$ и групповой алгеброй $\mathsf{k}G$, переводящая функцию $f \in \mathsf{k}[G]$ в элемент $\sum_g f(g)e_g \in \mathsf{k}G$. При этом элементам $e_g \in \mathsf{k}G$ соответствуют дельта-функции $\delta_g \in \mathsf{k}[G]$, равные 1 в $g$ и 0 в остальных элементах $G$.

**Определение 1.** Функция $f \in \mathsf{k}[G]$ называется *центральной*, если $f(hgh^{-1}) = f(g)$ для любых $h, g \in G$. Множество центральных функций обозначается $Z\mathsf{k}[G]$.

То есть, центральные функции – это функции, постоянные на классах сопряжённости. Как мы видели на прошлой лекции, $Z\mathsf{k}[G]$ соответствует центру $Z(\mathsf{k}G)$ алгебры $\mathsf{k}G$.

**Определение 2.** Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ – конечномерное представление $G$ над $\mathsf{k}$. *Характером* $\rho$ называется функция $\chi_\rho$:

$$\chi_\rho(g) = \operatorname{tr} \rho(g).$$

**Лемма 3.** *Характер – центральная функция.*

*Доказательство.*

$$\chi_\rho(hgh^{-1}) = \operatorname{tr} \rho(hgh^{-1}) = \operatorname{tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = \operatorname{tr}(\rho(g)) = \chi_\rho(g).$$

□

**Лемма 4.** *Если $\rho, \tau$ – два представления, то $\chi_{\rho\oplus\tau} = \chi_\rho + \chi_\tau$.*

*Доказательство.* Матрица оператора $(\rho \oplus \tau)(g)$ имеет вид $\begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \tau(g) \end{pmatrix}$, где $\rho(g)$ и $\tau(g)$ обозначают соответствующие матрицы. Поэтому $\operatorname{tr}((\rho \oplus \tau)(g)) = \operatorname{tr} \rho(g) + \operatorname{tr} \tau(g)$. □

Пусть $G$ – конечная группа и $|G| \neq 0$ в $\mathsf{k}$. Определим билинейную форму на $\mathsf{k}[G]$ равенством

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) f_2(g^{-1}).$$

Очевидно, эта форма симметрична. Также можно увидеть, что она невырождена: в базисе, состоящем из правильно упорядоченных функций $\delta_g$, матрица формы составлена из блоков $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $(1)$.

Главное утверждение, объясняющее важность характеров, – следующая

**Теорема 5.** *Пусть поле $\mathsf{k}$ алгебраически замкнуто, группа $G$ конечна и $|G| \neq 0$ в $\mathsf{k}$. Пусть $\rho_i\colon G \to GL(V_i)$, $i = 1, \ldots, k$ – все неприводимые представления $G$ над $\mathsf{k}$. Тогда характеры $\chi_i = \chi_{\rho_i}$ образуют ортогональный нормированный базис пространства $Z\mathsf{k}[G]$ относительно формы $\langle , \rangle$, т.е.*

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$$

*и любая центральная функция есть линейная комбинация характеров $\chi_i$.*

Перед доказательством теоремы сформулируем её основные следствия.

**Следствие 6.** *Пусть $V = \oplus_i V_i^{\oplus d_i}$ – разложение представления $\rho\colon G \to GL(V)$ на неприводимые слагаемые. Тогда $\chi_\rho = \sum d_i\chi_i$ и $d_i = \langle \chi_\rho, \chi_i\rangle$. В частности, представление однозначно определяется своим характером.*

*Доказательство.* По лемме 4,

$$\chi_\rho = \chi(\oplus_i \rho_i^{\oplus d_i}) = \sum d_i\chi_i.$$

Так как $\chi_i$ образуют ортогональную систему,

$$\langle \chi_\rho, \chi_i\rangle = \left\langle \sum_j d_j\chi_j, \chi_i \right\rangle = \sum d_j\delta_{ji} = d_i.$$

□

**Следствие 7.** *Множество характеров всех представлений есть пересечение решётки полного ранга в пространстве центральных функций и «координатного угла».*

*Доказательство.* Любой характер имеет вид $\sum_i d_i\chi_i$, где $d_i$ – неотрицательные целые числа, а $\chi_i$ – базис пространства центральных функций. Обратно, все такие функции – характеры. □

Таким образом, изучение представлений сводится к вычислению характеров $\chi_i$ неприводимых представлений. Если эти характеры известны, то разложить представление $\rho$ на неприводимые можно, вычислив его характер $\chi_\rho$ и разложив $\chi_\rho$ по базису из $\chi_i$.

**Следствие 8.** *Представление $\rho$ неприводимо тогда и только тогда, когда $\langle \chi_\rho, \chi_\rho\rangle = 1$.*

*Доказательство.* Пусть $\rho = \oplus_i \rho_i^{\oplus d_i}$ – разложение на неприводимые, тогда $\langle \chi_\rho, \chi_\rho\rangle = \sum_i d_i^2$. Это число равно 1 титтк ровно одно $d_i$ равно 1, а остальные равны 0. Т.е. титтк когда $\rho$ неприводимо. □

**Пример 9.** Пусть $G = S_3$, а $\mathsf{k} = \mathbb{C}$. У $S_3$ есть три неприводимые представления: тривиальное, чётность и представление движениями треугольника. Назовём их 1, $\sigma$ и $\tau$. В группе $S_3$ три класса сопряжённости: тождественная перестановка, транспозиции и тройные циклы. Таблица характеров имеет следующий вид:

| | $\chi_1$ | $\chi_\sigma$ | $\chi_\tau$ |
|---|---|---|---|
| $e$ | 1 | 1 | 2 |
| (12) | 1 | $-1$ | 0 |
| (123) | 1 | 1 | $-1$ |

Рассмотрим естественное представление $\rho$ группы $G$ в пространстве $V$ кубических форм от двух переменных, связанное с представлением $G$ движениями треугольника. Вычислим его характер $\chi$, получим $\chi(1) = 4$, $\chi((12)) = 0$, $\chi((123)) = 1$. Раскладывая $\chi$ по базису $\chi_i$, получаем $\chi = \chi_1 + \chi_\sigma + \chi_\tau$, следовательно $\rho \cong 1 \oplus \sigma \oplus \tau$.

Перейдём к доказательству теоремы 5. В действительности, мы докажем соотношения ортогональности для некоторой большей системы функций на группе, порождающей всё пространство $\mathsf{k}[G]$.

**Определение 10.** Пусть $\rho\colon G \to GL_n(\mathsf{k})$ – неприводимое представление, записанное в матричном виде. *Матричными элементами* представления $\rho$ называются функции

$$\phi^{\rho}_{ij}(g) = \rho(g)_{ij} \in \mathsf{k}[G],$$

т.е. коэффициенты матриц, задающих представление, рассматриваемые как функции на группе.

Матричные элементы представлений, в отличие от характеров, определены не инвариантно, они зависят от выбора базиса. Тем не менее, для них также верны соотношения ортогональности:

**Лемма 11.** *Пусть поле* $\mathsf{k}$ *алгебраически замкнуто, группа* $G$ *конечна и* $|G| \neq 0$ *в* $\mathsf{k}$. *Тогда для матричных элементов выполнены следующие соотношения ортогональности (где* $\rho$ *и* $\tau$ *– неприводимые представления* $G$ *над* $\mathsf{k}$*):*

$$\langle \phi^{\rho}_{ij}, \phi^{\tau}_{kl} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\dim \rho} & \text{при} \quad \rho = \tau, i = l, j = k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

*Доказательство ортогональности в теореме 5.* По определению, $\chi_\rho = \phi^{\rho}_{11} + \ldots + \phi^{\rho}_{dd}$, где $d = \dim \rho$. Вычисляя билинейную форму, получим

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum_{i,j=1}^{d} \langle \phi^{\rho}_{ii}, \phi^{\rho}_{jj} \rangle = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d} = 1.$$

А для неизоморфных $\rho$ и $\tau$ имеем

$$\langle \chi_\rho, \chi_\tau \rangle = \sum_{i,j} \langle \phi^{\rho}_{ii}, \phi^{\tau}_{jj} \rangle = 0.$$

□

*Доказательство леммы 11.* Пусть $Y$ – матрица размера $\dim \tau \times \dim \rho$ над $\mathsf{k}$. Усредняя $Y$ по действию группы, мы построим морфизм $Y'$ представлений $\rho \to \tau$, линейно зависящий от $Y$. По лемме Шура он скалярен, и приравнивая коэффициенты при элементах $Y$ в двух выражениях для $Y'$, получим нужные соотношения.

Положим

$$Y' = \sum_{g \in G} \tau(g) Y \rho(g^{-1}).$$

Проверим, что матрица $Y'$ задаёт морфизм из $\rho$ в $\tau$:

$$\tau(h)Y' = \tau(h) \sum_{g \in G} \tau(g) Y \rho(g^{-1}) = \sum_{g \in G} \tau(hg) Y \rho(g^{-1}) = \sum_{g \in G} \tau(hg) Y \rho(g^{-1}h^{-1}h) =$$
$$= \sum_{g \in G} \tau(hg) Y \rho((hg)^{-1}) \rho(h) = \sum_{g \in G} \tau(g) Y \rho(g^{-1}) \rho(h) = Y' \rho(h).$$

Коэффициенты матрицы $Y'$ имеют вид:

$$Y'_{ij} = \sum_{g \in G} \sum_{k,l} \tau(g)_{ik} Y_{kl} \rho(g^{-1})_{lj} = \sum_{k,l,g} \phi^{\tau}_{ik}(g) \phi^{\rho}_{lj}(g^{-1}) Y_{kl}.$$

Пусть $\rho \ncong \tau$. Тогда по лемме Шура $Y' = 0$ для любой матрицы $Y$. Это значит, что в выражении для $Y'_{ij}$ коэффициенты при всех $Y_{kl}$ равны нулю, т.е. $\forall i, j, k, l$ имеем

$$\sum_g \phi^{\tau}_{ik}(g)\phi^{\rho}_{lj}(g^{-1}) = 0,$$

это даёт ортогональность матричных элементов для неизоморфных представлений.

Пусть теперь $\rho = \tau$, обозначим $d = \dim \rho$. Тогда по лемме Шура $Y' = \lambda(Y) \cdot E$ – скалярная матрица. Чтобы найти $\lambda(Y)$, вычислим след обеих частей равенства $Y' = \sum_{g\in G} \rho(g) Y \rho(g^{-1})$. Получим

$$\lambda(Y) \cdot d = \operatorname{tr} Y' = \sum_g \operatorname{tr}(\rho(g) Y \rho(g)^{-1}) = \sum_g \operatorname{tr} Y = |G| \cdot (Y_{11} + \ldots + Y_{dd}).$$

Следовательно,

$$Y' = \lambda(Y) \cdot E = \frac{|G|}{d}(Y_{11} + \ldots + Y_{dd}) \cdot E.$$

(Заодно мы выяснили, что размерность неприводимого представления $\dim \rho$ не равна нулю в поле $\mathsf{k}$: $|G| \neq 0$ по условию и выражение $Y_{11} + \ldots + Y_{dd}$ принимает ненулевые значения.) Получаем, что при всех $Y$ и $i, j$ выполнено

$$\sum_{k,l,g} \phi^{\rho}_{ik}(g)\phi^{\rho}_{lj}(g^{-1}) Y_{kl} = Y'_{ij} = \delta_{ij}\frac{|G|}{d}(Y_{11} + \ldots + Y_{dd}).$$

Сравнивая коэффициенты при $Y_{kl}$, получаем $\sum_g \phi^{\rho}_{ik}(g)\phi^{\rho}_{lj}(g^{-1}) = \delta_{ij}\delta_{kl}\frac{|G|}{d}$, что даёт соотношения для матричных элементов одного неприводимого представления. □

*Доказательство полноты в теореме 5.* Теперь докажем, что характеры неприводимых представлений $\chi_1, \ldots, \chi_k$ порождают всё пространство центральных функций. В противном случае найдётся центральная функция $f \in Z\mathsf{k}[G]$ такая, что $\langle f, \chi_i \rangle = 0$ для всех $i$. Покажем, что $f = 0$. Рассмотрим элемент $x = \sum_g f(g^{-1}) e_g \in \mathsf{k}[G]$. Из вычислений прошлой лекции следует, что он принадлежит центру групповой алгебры $\mathsf{k}G$. Пусть теперь $\rho\colon G \to GL(V)$ – произвольное представление $G$. Рассмотрим $V$ как модуль над $\mathsf{k}G$ и определим оператор $F$ на пространстве $V$ как умножение слева на $x$, т.е. $F = \sum_g f(g^{-1})\rho(g)$. Так как $x$ лежит в центре, оператор $F$ перестановочен с действием группы, т.е. является эндоморфизмом представления $V$. Покажем, что $F = 0$. Это достаточно проверить для неприводимых представлений, так как $F$ сохраняет все инвариантные подпространства в $V$ и $V$ раскладывается в прямую сумму неприводимых. Если $V$ неприводимо, то по лемме Шура $F$ – скаляр $\lambda \in \mathsf{k}$. Вычисляя след, получаем

$$\lambda \cdot \dim V = \operatorname{tr} F = \sum_g f(g^{-1}) \operatorname{tr} \rho(g) = \sum_g f(g^{-1}) \chi_\rho(g) = |G| \langle \chi_\rho, f \rangle = 0.$$

Так как $\dim V \neq 0$ в $\mathsf{k}$, получаем $F = \lambda = 0$.

Таким образом, умножение на $x$ – нулевой оператор на любом представлении. Применяя это к регулярному представлению, получим, что $x = x \cdot e_e = 0$, а значит и $f = 0$. □

Если основное поле – поле комплексных чисел, часто рассматривают не введённую выше билинейную форму на $\mathbb{C}[G]$, а полуторалинейную форму

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}.$$

Она (с точностью до константы) задаётся в базисе из $\delta$-функций единичной матрицей, поэтому эрмитова и положительно определена. При этом на множестве характеров форма $(,)$ совпадает с $\langle , \rangle$.

Действительно, нужно проверить, что для характера представления $\rho$ над $\mathbb{C}$ верно $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. Так как представление $\rho$ унитаризуется, оператор $\rho(g)$ можно записать в подходящем базисе унитарной матрицей, так что $\rho(g)^{-1} = \overline{\rho(g)^T}$. Вычисляя след, находим что $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.