Полупростые модули и полупростые алгебры

На прошлых лекциях мы изучали представления групп, т.е. модули над групповой алгеброй. В действительности, многие свойства представлений (в основном, связанные с неприводимыми представлениями) – это общие свойства, выполненные для модулей над полупростыми алгебрами.

Сегодня алгебра A будет предполагаться ассоциативной алгеброй с единицей, конечномерной над полем k. Под модулями мы будем иметь в виду конечномерные (над k) левые A-модули.

Определение 1. Модуль P называется *простым* или *неприводимым*, если он имеет только два подмодуля – 0 и P.

Так же, как и для представлений групп, верны

Лемма 2 (лемма Шура). *Пусть P и Q – простые модули. Тогда*

1. $\mathrm{Hom}_A(P,Q)=0$, *если P и Q неизоморфны;*
2. *ненулевые элементы* $\mathrm{Hom}_A(P,P)$ *обратимы;*
3. *если* k *алгебраически замкнуто, то* $\mathrm{Hom}_A(P,P)=\mathsf{k}$.

и

Лемма 3. *Пусть $P_1,\dots,P_k$ – неизоморфные простые модули. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_A(P_1^{\oplus m_1}\oplus\ldots\oplus P_k^{\oplus m_k}, P_1^{\oplus n_1}\oplus\ldots\oplus P_k^{\oplus n_k})\cong$$
$$\cong \mathrm{Mat}_{n_1\times m_1}(\mathrm{Hom}_A(P_1,P_1))\oplus\ldots\oplus\mathrm{Mat}_{n_k\times m_k}(\mathrm{Hom}_A(P_k,P_k)).$$

Доказательства точно такое же, как для представлений групп. Последняя лемма позволяет определить изотипические компоненты для модулей, разлагающихся в прямую сумму простых, и доказать их единственность. Такие модули называются полупростыми.

Определение 4. Модуль вида $P_1\oplus\ldots\oplus P_k$, где P_i простые, называется *полупростым.*

Определение 5. Модуль M называется *полупростым*, если для любого подмодуля $M'\subset M$ существует дополнительный подмодуль, т.е. такой $M''\subset M$, что $M=M'\oplus M''$.

Предложение 6. *Определения 4 и 5 равносильны.*

Доказательство. Из 5 в 4: по индукции раскладываем на слагаемые, пока все они не станут простыми. Процесс оборвётся, так как M конечномерен. Всё, что нужно объяснить, – то, что подмодуль полупростого модуля полупрост (в смысле определения 5). Действительно, если M полупрост и $M_0'\subset M_0\subset M$, возьмём дополнительный подмодуль M'' к M_0' в M и положим $M_0''=M_0\cap M''$. Тогда $M_0''\cap M_0'=0$ и $M_0''+M_0'=M_0$, т.е. $M_0''\oplus M_0'=M_0$.

Из 4 в 5: если P_i простые, то любой подмодуль M' в $M=P_1\oplus\ldots\oplus P_k$ имеет дополнительный. Возьмём в качестве M'' максимальную частичную сумму в $P_1\oplus\ldots\oplus P_k$ такую, что $M''\cap M'=0$, докажем что $M'\oplus M''=M$. Можно считать, что $M''=P_1\oplus\ldots P_s$, пусть $p\colon M\to P_{s+1}\oplus\ldots\oplus P_k$ – проекция. Нужно показать, что $p(M')=P_{s+1}\oplus\ldots\oplus P_k$. Пересечение $p(M')\cap P_i\subset P_i$ – подмодуль простого модуля, поэтому $p(M')\supset P_i$ или $p(M')\cap P_i=0$. Если $p(M')$ содержит все P_i, то $p(M')$ содержит и сумму $\oplus_{i>s}P_i$. Иначе $p(M')$ не пересекается с некоторым P_i, и тогда $M'\cap(P_1\oplus\ldots\oplus P_s\oplus P_i)=0$, что противоречит выбору M''. ∎

Из доказательства следует, что любой подмодуль и фактормодуль модуля $P_1 \oplus \ldots \oplus P_k$, где P_i простые, – это сумма некоторых слагаемых в $P_1 \oplus \ldots \oplus P_k$.

Простейшие свойства полупростых модулей – следующие.

Предложение 7. *1. Подмодуль и фактормодуль полупростого модуля полупросты.*

2. Прямая сумма полупростых модулей полупроста.

3. Сумма полупростых подмодулей в заданном модуле полупроста.

Доказательство. 1. Доказано выше. 2. Следует из определения 4. 3. Если $M_1 \subset M$ и $M_2 \subset M$ – полупростые подмодули, то найдутся дополнительные подмодули (также полупростые) M_1' и M_2' такие, что $M_1 = M_1' \oplus (M_1 \cap M_2)$, $M_2 = M_2' \oplus (M_1 \cap M_2)$. Тогда, по 2, модуль $M_1 + M_2 = M_1' \oplus (M_1 \cap M_2) \oplus M_2'$ полупрост. ☐

Вообще говоря, не любой модуль полупрост. Однако верна

Лемма 8. *У любого модуля M существует наибольший полупростой подмодуль.*

Доказательство. Рассмотрим сумму $+_{P\subset M} P$ всех полупростых подмодулей. Эта сумма фактически конечна и по предыдущему полупроста, она содержит все полупростые подмодули M. ☐

Определение 9. Алгебра A называется *полупростой*, если все модули над A полупросты.

Лемма 10. *Алгебра A полупроста тогда и только тогда, когда левый A-модуль A полупрост.*

Доказательство. «Только тогда» по определению, докажем «тогда». Пусть M – произвольный A-модуль, $m_1, \ldots, m_k$ – система порождающих. Тогда M – фактормодуль $A^{\oplus k}$, отображение $A^{\oplus k} \to M$ задаётся формулой $(a_i) \mapsto \sum a_i m_i$. По предложению 7, M полупрост как фактор полупростого. ☐

Из доказательства следует важный факт: все простые модули над полупростой алгеброй A встречаются в разложении модуля A на простые слагаемые, и их конечное число.

Пример 11. Если G – конечная группа и $|G| \neq 0$ в поле k, то групповая алгебра $\mathsf{k}G$ полупроста.

Пример 12. Пусть $A = M_n(\mathsf{k})$ – алгебра матриц. Матрица состоит из столбцов, поэтому $A \cong P^n$ как левый A-модуль, где $P = \mathsf{k}^n$ – модуль столбцов. Очевидно, P прост, по лемме 10 алгебра A полупроста и имеется единственный простой A-модуль.

Определение 13. Напомним, алгебра A называется *алгеброй с делением*, или *телом*, если $\forall x \neq 0 \in A\ \exists x^{-1} \in A$.

Пример 14. Алгебра с делением полупроста. В действительности, модули над алгебрами с делением устроены точно так же, как векторные пространства над полем: в них всегда есть базис, корректно определена размерность и т.д. Поэтому над алгеброй с делением любой модуль есть прямая сумма тривиальных одномерных модулей.

Определение 15. Алгебра A называется *простой*, если не содержит двусторонних идеалов, кроме 0 и A.

Пример 16. Тело и алгебра матриц над полем или телом – простые алгебры.

Простые алгебры так же связаны с полупростыми алгебрами, как простые модули – с полупростыми модулями.

Предложение 17. *Простая алгебра полупроста.*

Доказательство. Покажем, что левый модуль A над простой алгеброй A полупрост. Пусть $N \subset A$ – сумма всех простых подмодулей P в A, по лемме 8 модуль N полупрост. Тогда для любого $a \in A$ подмодуль $Pa \subset A$ – образ простого модуля, поэтому прост либо равен нулю. В любом случае, $Pa \subset N$, поэтому N – не только левый, но и правый идеал. Так как A проста, $N = A$, значит модуль A полупрост. □

Верно и то, что любая полупростая алгебра, – прямая сумма простых. Это будет следовать из явного описания полупростых алгебр, которое мы даём ниже. (В действительности, более правильно говорить о прямом произведении алгебр, а не о прямой сумме, что мы и будем дальше делать.)

Предложение 18. *Любая полупростая алгебра – конечное прямое произведение матричных алгебр над телами.*

Доказательство. Пусть A – полупростая алгебра. Мы доказывали, что противоположная алгебра A^{op} изоморфна алгебре эндоморфизмов $\mathrm{End}_A(A)$ левого модуля A. Разложим этот модуль в прямую сумму простых, сгруппируем изоморфные слагаемые: $A = \oplus_i P_i^{n_i}$. По лемме 3,

$$\mathrm{End}_A(A) = \mathrm{End}_A(\oplus_i P_i^{n_i}) \cong \prod_i M_{n_i}(\mathrm{End}_A(P_i)).$$

При этом алгебры $T_i = \mathrm{End}_A(P_i)$ – тела по лемме Шура. Остаётся заметить, что противоположная алгебра к алгебре матриц $M_n(T)$ над телом T – алгебра матриц $M_n(T^{op})$ над T^{op}. □

Следствие 19. *Любая полупростая алгебра – прямое произведение простых.*

Наконец, опишем все модули над полупростой алгеброй $\prod_i M_{n_i}(T_i)$.

Лемма 20. *Любой модуль над прямым произведением алгебр $A \times B$ имеет вид $M \oplus N$, где M – A-модуль, а N – B-модуль.*

Доказательство. Если K – модуль над $A \times B$, положим $K_A = (1,0) \cdot K$, $K_B = (0,1) \cdot K$. Это будут модули над A и B соответственно, причём $A \cdot K_B = B \cdot K_A = 0$, откуда получаем $K_A \oplus K_B = K$. □

А любой модуль над алгеброй матриц полупрост и поэтому есть кратная прямая сумма единственного простого модуля с собой, см. пример 12. Получаем

Предложение 21. *Все простые модули над алгеброй $\prod_i M_{n_i}(T_i)$ (где T_i – тела) – модули $P_i = T_i^{n_i}$ такие, что $M_{n_j}(T_j)$ действует на P_i нулём при $i \neq j$ и умножением матрицы на столбец при $i = j$.*

Заметим, что модули P_i неизоморфны, даже если среди матричных алгебр $M_{n_i}(T_i)$ есть изоморфные, – на разных P_i действуют нулём разные подмножества в A.

Следствие 22. *Полупростая алгебра A проста титтк существует единственный простой модуль над A.*

Теперь сформулируем и докажем критерий, позволяющий во многих случаях проверять полупростоту алгебры.

Определим на любой ассоциативной алгебре A билинейную форму следующим образом. Пусть $x \in A$, обозначим через $m_x\colon A \to A$ оператор умножения на x, $m_x(a) = xa$. Положим

$$\langle x, y\rangle = \operatorname{tr}_A m_{xy}.$$

Пример 23. Пусть $A = M_n(\mathsf{k})$ – алгебра матриц. Вычислим билинейную форму для базисных элементов $e_{ij} \in A$. Используя $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, получаем

$$\langle e_{ij}, e_{kl}\rangle = \operatorname{tr} m_{e_{ij}e_{kl}} = \delta_{jk} \operatorname{tr} m_{e_{il}} = \delta_{jk}\delta_{il}n.$$

Наша цель – доказать следующий критерий.

Предложение 24. *Пусть* $\operatorname{char}\mathsf{k} = 0$. *Тогда A полупроста титтк билинейная форма* $\langle , \rangle$ *невырождена.*

В дальнейшем будем предполагать, что **характеристика поля k равна нулю**.

Лемма 25. *Для введённой билинейной формы выполнены свойства:*

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
2. $\langle xy, z\rangle = \langle x, yz\rangle$,
3. *если $I \subset A$ – левый идеал, то $I^\perp$ – правый идеал, аналогично с заменой левого на правое.*
4. *если $I \subset A$ – двусторонний идеал, то $I^\perp$ – тоже двусторонний идеал.*

Доказательство. 1. $\operatorname{tr} m_{xy} = \operatorname{tr} m_x m_y = \operatorname{tr} m_y m_x = \operatorname{tr} m_{yx}$.

2. Обе части равенства равны $\operatorname{tr} m_{xyz}$.

3. Пусть $x \in I^\perp$, $a \in A$, покажем, что $xa \in I^\perp$. Для $i \in I$ имеем $\langle xa, i\rangle = \langle x, ai\rangle = 0$, т.к. $ai \in I$ и $x \in I^\perp$.

4. Следует из 3. □

Определение 26. Элемент x в кольце (например, оператор на векторном пространстве) называется *нильпотентным*, если $x^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 27.
1. *Если оператор X на векторном пространстве нильпотентен, то* $\operatorname{tr} X^k = 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$
2. *Если* $\operatorname{tr} X^k = 0$ *при всех* $k \geqslant 2$, *то X нильпотентен.*

Доказательство. Приведём X к нормальной форме Жордана. Из того, что $X^n = 0$, следует, что все диагональные элементы равны 0, откуда $\operatorname{tr} X^k = 0$.

Напротив, пусть $\operatorname{tr} X^k = 0$ при всех $k \geqslant 2$. Докажем, что все диагональные элементы равны 0. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ – все различные ненулевые диагональные элементы в нормальной форме Жордана X с кратностями n_i. Условие $\operatorname{tr} X^k = 0$ означает, что $\sum \lambda_i^k n_i = 0$. Это означает, что матрица Вандермонда

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_r^2 \\ \ldots & & \ldots \\ \lambda_1^{r-1} & \ldots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

обнуляется вектором $(\lambda_1^2 n_1, \ldots, \lambda_r^2 n_r)$ и поэтому вырождена, что невозможно, если $r > 0$. Получаем, что X записывается строго верхнетреугольной матрицей и поэтому нильпотентен. □

Доказательство предложения 24 в одну сторону. Докажем, что алгебра полупроста, если билинейная форма $\operatorname{tr} m_{xy}$ невырождена. Для этого разложим A в прямую сумму простых алгебр. Пусть A не проста и $I \subset A$ – минимальный по вложению двусторонний идеал. Тогда $I^{\perp}$ – также двусторонний идеал, причём $\dim I + \dim I^{\perp} = \dim A$ из-за невырожденности. Пересечение $I \cap I^{\perp}$ – снова двусторонний идеал, значит по минимальности I получим $I \cap I^{\perp} = 0$ или $I \subset I^{\perp}$. Если выполнено первое, то $A = I \oplus I^{\perp}$, это прямая сумма подалгебр. При этом ограничение билинейной формы $\operatorname{tr}_A m_{xy}$ на I совпадает с билинейной формой $\operatorname{tr}_I m_{xy}$, вычисленной на алгебре I, аналогично для $I^{\perp}$. Продолжая по индукции, получаем разложение A в прямую сумму простых алгебр. Докажем, что альтернатива $I \subset I^{\perp}$ невозможна. Если $I \subset I^{\perp}$, то для любого $x \in I$ имеем $\langle x, x^k \rangle = 0$ при $k \geqslant 1$. Значит, $\operatorname{tr}(m_x)^k = \operatorname{tr} m_{x^k} = 0$ при $k \geqslant 2$. По лемме 27, оператор m_x нильпотентен. Тогда $\langle x, y \rangle = \operatorname{tr} m_{xy} = 0$ (тоже по лемме 27) для любого $y \in A$, так как $xy \in I$ и m_{xy} нильпотентен. Получаем, что $I^{\perp} = A$, что означает $I = 0$ в силу невырожденности формы. $\square$

Доказательство предложения 24 в другую сторону. Теперь докажем, что на полупростой алгебре билинейная форма невырождена. Как и выше, если алгебра A раскладывается в прямое произведение $A_1 \times A_2$, то A_1 и A_2 ортогональны и ограничение билинейной формы следа на A_1 совпадает с формой следа, вычисленной на алгебре A_1. Действительно, если $x_i \in A_i$, то $\langle x_1, x_2 \rangle = \operatorname{tr}_A m_{x_1 x_2} = \operatorname{tr}_A 0 = 0$. А если $x, y \in A_1$, то $\langle x, y \rangle_A = \operatorname{tr}_A m_{xy} = \operatorname{tr}_{A_1} m_{xy} = \langle x, y \rangle_{A_1}$, так как $m_{xy} = 0$ на A_2.

Таким образом, разложение полупростой алгебры в произведение простых ортогонально, и достаточно рассмотреть случай простой алгебры. Если же A проста, то $A^{\perp} \subset A$ – двусторонний идеал по лемме 25, и он равен нулю в силу простоты. Это и означает невырожденность формы. $\square$

Пример 28. В качестве применения критерия покажем, что групповая алгебра конечной группы G полупроста (в характеристике ноль). Вычислим $\langle e_g, e_h \rangle$. Заметим, что оператор m_{e_s} имеет нулевую диагональ при $s \neq e$ и тождествен при $s = e$. Вычисляя след, получаем:

$$\langle e_g, e_h \rangle = \operatorname{tr} m_{e_{gh}} = \begin{cases} 0 & \text{при } gh \neq e, \\ |G| & \text{при } gh = e. \end{cases}$$

То есть, матрица формы невырождена, следовательно, алгебра $\mathsf{k}G$ полупроста.