Алгебра 2 7.02.2011
Листок 1

Двойственность

Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем k, а V^* – двойственное пространство. Определим отображение $^\perp$ из подпространств V в подпространства V^*: для $U \subset V$ положим $U^\perp = \{f \in V^* | \forall u \in U \ f(u) = 0\}$.
Задача 1°. Докажите следующие свойства: $U^{\perp\perp} = U$; $U_1 \subset U_2 \Leftrightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$; $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$; $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

Решёткой в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ называется дискретная (т.е. такая, у которой в некоторой проколотой окрестности нуля нет точек) подгруппа по сложению.
Задача 2. Докажите, что любая решётка в V порождена конечным набором линейно независимых векторов: $L = \mathbb{Z}v_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}v_r$, причём $r \leqslant \dim V$. Число векторов r называется *рангом* решётки. Решёткой *полного ранга* называется решётка ранга $r = \dim V$.

Зададим отображение $^\vee$ из решёток полного ранга в V в решётки полного ранга в V^*: для $L \subset V$ положим $L^\vee = \{f \in V^* | \forall x \in L \ f(x) \in \mathbb{Z}\}$.
Задача 3. a) Проверьте, что: $L^{\vee\vee} = L$; $L_1 \subset L_2 \Leftrightarrow L_2^\vee \subset L_1^\vee$, при этом абелевы группы L_2/L_1 и $L_1^\vee/L_2^\vee$ изоморфны. Порядок этих групп называется *индексом* подрешётки. b) Пусть e_i и e^i – двойственные базисы в V и V^*, а базис решётки L задан через e_i матрицей A. Задайте матрицей базис $L^\vee$ через e^i.
Задача 4. a) Пусть p – простое число, а U – векторное пространство размерности n над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Сколько у U k-мерных подпространств? b) Пусть L – решётка ранга n. Сколько существует промежуточных решёток между L и pL? c) Сколько в L подрешёток индекса p? индекса p^2?

Пусть V – векторное пространство над полем k, а $v_1, \ldots, v_n \in V$ – набор векторов, порождающий V. Пусть W – пространство соотношений между векторами v_i, т.е. $W = \{(w_1, \ldots, w_n) | \sum v_i w_i = 0\}$. Рассматривая $w_1, \ldots, w_n$ как функционалы на W, получаем пару из пространства W^* и порождающих его элементов $w_1, \ldots, w_n$. Она называется *двойственной по Гейлу* к паре $(V, (v_i))$.
Задача 5. Покажите, что $a°$) дважды двойственная пара изоморфна исходной;
b) если $p\colon V \to V'$ – сюръективное отображение и $v_i' = p(v_i)$, то имеется двойственная по Гейлу сюръекция $q\colon W'^* \to W^*$, причём $q(w_i') = w_i$;
c) $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы титтк $w_{k+1}, \ldots, w_n$ порождают W^*.
Задача 6°. Нарисуйте двойственные по Гейлу данные к
a) $V = \mathbb{R}^2, v_{1\ldots4} = (1,0), (-1,0), (n,1), (0,-1)$; b) $V = \mathbb{R}^2, v_{1\ldots3} = (1,0), (0,1), (-1,-1)$; c) $V = \mathbb{R}, v_{1\ldots5} = 1$; d) $V = \mathbb{R}, v_{1\ldots4} = 1, 2, 3, 4$.

Конусом в $\mathbb{R}^n$ называется множество $X \subset \mathbb{R}^n$ такое, что для любых $x \in X$ и $a \geqslant 0$ имеем $ax \in X$. Множество в $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит соединяющий их отрезок. Пусть X – подмножество в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ размерности n. Определим подмножество $X^\vee \subset V^*$: $X^\vee = \{f \in V^* | f(X) \geqslant 0\}$.
Задача 7. Покажите, что a) $X \subset Y \Leftrightarrow Y^\vee \subset X^\vee$; b) X содержит линейное подпространство размерности k титтк $X^\vee$ лежит в линейном подпространстве размерности $n - k$. c) $X^\vee$ – замкнутый (в вещественной топологии) выпуклый конус; d) если X – замкнутый выпуклый конус, то $X^{\vee\vee} = X$; e) в общем случае $X^{\vee\vee}$ – замыкание конуса, порождённого выпуклой оболочкой X.