Алгебра 2

14.02.2011
Листок 2

# Тензоры

**Задача 1°.** Пусть $A$ – коммутативное кольцо, $M$ – $A$-модуль, а $I \subset A$ – идеал. Определим $IM$ как подмодуль в $M$, порождённый элементами $im, i \in I, m \in M$. a) Докажите, что $M \otimes_A (A/I) \cong M/IM$. b) Всегда ли $IM \cong I \otimes_A M$? c) Для модулей $M' \subset M$ и $N$ докажите, что $(M/M') \otimes N \cong (M \otimes N)/(M' \otimes N)$. d) Опишите $A/I \otimes_A A/J$, где $I, J \subset A$ – идеалы.
**Задача 2.** Тензоры типа $(1, 2)$ – это билинейные отображения $V \times V \to V$, т.е. «умножения» на $V$. a) Запишите для тензора $\sum a^i_{jk} e_i \otimes e^j \otimes e^k$ условия коммутативности, ассоциативности, условие того, что $e_1$ – единица. b) Запишите тензоры, соответствующие $\mathbb{R}$-алгебрам $\mathbb{C}$ и $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. $c°$) Опишите алгебру, заданную тензором

$$\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma e_{\sigma(1)} \otimes e^{\sigma(2)} \otimes e^{\sigma(3)}.$$

В остальных задачах этого листка мы считаем, что $V$ – конечномерное векторное пространство над полем характеристики 0.
**Задача 3.** a) Докажите, что $T^k V = S^k V \oplus \Lambda^k V \oplus A^k(V)$, где $A^k(V) = \ker \mathrm{Alt} \cap \ker \mathrm{Sym}$. b) Напишите соответствующее разложение для тензора $e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_4$. c) Какова размерность $A^k(V)$?
**Задача 4 (Производная).** Вычислите композиции следующих отображений:

$$S^k V^* \to T^k V^* \cong (T^{k-1} V^*) \otimes V^* \to (S^{k-1} V^*) \otimes V^*;$$
$$S^k V^* \to T^k V^* \cong (T^{k-2} V^*) \otimes V^* \otimes V^* \to (S^{k-2} V^*) \otimes V^* \otimes V^*.$$

Для $x \in T^k V$, $\xi \in T^l V^*$ при $k \geqslant l$ определим $x \vdash \xi$ как последовательную свёртку $x \otimes \xi$ по $(1, 1), (2, 2), \ldots, (l, l)$ индексам, это элемент $T^{l-k} V$.

Пусть $x \in \Lambda^k V$.
**Задача 5°.** a) Пусть векторы $v_1, \ldots, v_r$ линейно независимы. Тогда $\forall i \ x \wedge v_i = 0 \Leftrightarrow x = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \wedge \ldots$. b) Пусть ковекторы $f_1, \ldots, f_r$ линейно независимы. Тогда $\forall i \ x \vdash f_i = 0 \Leftrightarrow x \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle^\perp$.
**Задача 6.** $a°$) Докажите, что 2-вектор $x$ разложим $\Leftrightarrow x \wedge x = 0$. b) Докажите, что все тензоры в $\Lambda^{n-1} V$ разложимы, где $n = \dim V$.

*Рангом* $x \in \Lambda^k V$ называется минимальное $d$ такое, что $x \in \Lambda^k U$, где $U \subset V$ – $d$-мерное подпространство. Определим $\mathrm{Ann}\, x = \{f \in V^* \mid x \vdash f = 0\}$.
**Задача 7.** a) Докажите, что $\mathrm{rk}\, x = k \Leftrightarrow x$ разложим, в противном случае $\mathrm{rk}\, x > k$. $b°$) Докажите, что $\mathrm{rk}\, x + \dim \mathrm{Ann}\, x = \dim V$. c) Как связаны ранг 2-вектора $\sum a_{ij} e_i \wedge e_j$ и ранг матрицы $(a_{ij})$? d) Каким может быть ранг 2-вектора? e) Пусть $x \in \Lambda^k V, y \in \Lambda^l U$. Чему равен ранг $x \wedge y \in \Lambda^{k+l}(V \oplus U)$? При $k = l$, чему равен ранг $x + y \in \Lambda^k(V \oplus U)$? f) Каким может быть ранг $k$-вектора?
**Задача 8.** a) Докажите, что отображения $x \vdash -\colon V^* \to \Lambda^{k-1} V$ и $x \vdash -\colon \Lambda^{k-1} V^* \to V$ двойственны друг другу (с точностью до знака). b) Как связан ранг этих отображений с рангом $x$? c) Докажите, что $x$ разложим $\Leftrightarrow (x \vdash \xi) \wedge x = 0$ для любого $\xi \in \Lambda^{k-1} V^*$.

Квадратичные уравнения $(x \vdash \xi) \wedge x = 0$, задающие множество разложимых $k$-векторов, называются *уравнениями Плюккера.*