

## Представления разных групп

В этом листочке предполагается, что основное поле – поле комплексных чисел.

**Задача 1.** Пусть  $S_n$  – группа перестановок, а  $A_n \subset S_n$  – подгруппа чётных перестановок.

a) Докажите, что коммутант  $S_n$  есть  $A_n$ .

b) Найдите коммутант  $A_n$ .

**Задача 2.** Разложите на неприводимые слагаемые представления

a°)  $S_n$  и

b)  $A_n$  в  $\mathbb{C}^n$  перестановками базиса.

**Задача 3.** Опишите все неприводимые представления

a°)  $S_4$ ;

b)  $A_4$ .

**Задача 4.** Пусть  $T$  обозначает группу движений тетраэдра.

a°) Докажите, что  $T$  изоморфна  $S_4$ .

Разложите в прямую сумму неприводимых естественное представление  $T$  в пространстве функций на

b°) вершинах; c°) рёбрах; d) гранях тетраэдра.

**Задача 5.** Пусть  $O$  обозначает группу вращений куба.

a) Докажите, что  $O$  изоморфна  $S_4$ .

Разложите в прямую сумму неприводимых естественное представление  $O$  в пространстве функций на

b) вершинах; c) рёбрах; d) гранях куба.

*Группой диэдра  $D_n$  (при  $n \geq 3$ ) называется группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих прямоугольную призму, основание которой – правильный  $n$ -угольник.*

**Задача 6.**

a°) Задайте  $D_n$  образующими и соотношениями.

b) Найдите коммутант  $D_n$ .

c°) Найдите классы сопряжённости элементов в  $D_n$ .

d) Дайте определение  $D_n$  для  $n = 2$ .

**Задача 7.** Опишите все неприводимые представления группы  $D_n$

a) при нечётном  $n$ ;

b) при чётном  $n$ .

**Задача 8°.** Опишите все неприводимые представления a)  $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ .

**Задача 9.** Пусть  $V_1$  и  $V_2$  – представления групп  $G_1$  и  $G_2$ . Определим представление группы  $G_1 \times G_2$  в пространстве  $V_1 \otimes V_2$  равенством  $(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = g_1(v_1) \otimes g_2(v_2)$ .

a) Пусть  $V_1$  и  $V_2$  – неприводимые представления. Тогда и  $V_1 \otimes V_2$  – неприводимое представление группы  $G_1 \times G_2$ .

b) Докажите, что так получаются все неприводимые представления  $G_1 \times G_2$ .