Вещественные и комплексные представления

Все представления в этом листке считаются конечномерными.

Задача 1. a) Докажите, что для любой конечной группы существует точное представление над любым полем.

b) Докажите, что для любой конечной группы G существуют такие n и множество $X \subset \mathbb{R}^n$, что G есть группа линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, сохраняющих X.

Задача 2. Пусть $|G| \neq 0$ в k, $V_1, \ldots, V_k$ – все неприводимые представления G над k, $c_i = \dim_{\mathsf{k}} \operatorname{End}^G(V_i)$. a) Докажите формулу $|G| = \sum_{i=1}^k (\dim_{\mathsf{k}} V_i)^2 / c_i$.

b) Получите аналог (для незамкнутого поля) формулы для числа классов неприводимых представлений через количество классов сопряжённости элементов G.

Пусть $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$ – подгруппа по умножению.

Задача 3. a) Докажите, что любая неабелева группа порядка 8 изоморфна либо D_4, либо Q.

b) Задайте Q образующими и соотношениями.

c) Найдите все неприводимые представления Q над $\mathbb{C}$.

Задача 4°. Докажите, что любое представление конечной группы над $\mathbb{R}$ изоморфно своему двойственному.

Задача 5. a^*) Докажите, что всякая конечномерная алгебра с делением над $\mathbb{R}$ изоморфна $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$.

b) Если U – неприводимое представление G над $\mathbb{R}$, то $\operatorname{End}^G(U) \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$.

Овеществление и комплексификация. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{C}$, оно является векторным пространством и над $\mathbb{R}$, обозначим его $V_{\mathbb{R}}$. Пусть U – векторное пространство над $\mathbb{R}$, положим $U_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$, это векторное пространство над $\mathbb{C}$.
Пусть дано представление группы G в комплексном пространстве V. Забывая комплексную структуру, получаем представление G в $V_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Обратно, если $\rho\colon G \to GL(U)$ – представление в пространстве U над $\mathbb{R}$, то определено представление $\rho_{\mathbb{C}}\colon G \to GL(U_{\mathbb{C}})$ в пространстве $U_{\mathbb{C}}$: $\rho_{\mathbb{C}}(g)(z \otimes u) = z \otimes \rho(g)(u)$.

Задача 6. a) Как связаны размерности V и $V_{\mathbb{R}}$? U и $U_{\mathbb{C}}$?

b) Пусть U – вещественное представление. Докажите, что $(U_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong U \oplus U$.

c) Пусть V – комплексное представление. Докажите, что $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong V \oplus V^*$.

Задача 7. Пусть V – неприводимое представление G над $\mathbb{C}$. Тогда либо $V_{\mathbb{R}}$ неприводимо над $\mathbb{R}$, либо V изоморфно представлению вида $U_{\mathbb{C}}$, где U – неприводимое вещественное представление.

Задача 8. Пусть U – неприводимое представление группы G над $\mathbb{R}$.

a) Если $\operatorname{End}^G(U) = \mathbb{R}$, то $U_{\mathbb{C}}$ неприводимо и $U_{\mathbb{C}} \cong U_{\mathbb{C}}^*$.

b) Если $\operatorname{End}^G(U) = \mathbb{C}$, то $U_{\mathbb{C}} \cong V_+ \oplus V_-$, где представления V_+ и V_- неприводимы над $\mathbb{C}$, неизоморфны друг другу и $(V_+)^* \cong V_-$.

c) Если $\operatorname{End}^G(U) = \mathbb{H}$, то $U_{\mathbb{C}} \cong V \oplus V$, где представление V неприводимо над $\mathbb{C}$ и $(V)^* \cong V$.

d) Приведите примеры ко всем трём случаям.

Задача 9. Докажите, что любое неприводимое представление конечной абелевой группы над $\mathbb{R}$ одномерно или двумерно.

Задача 10. Опишите все неприводимые представления над $\mathbb{R}$ для a) конечной циклической группы; b) S_3 и S_4; c) кватернионной группы Q.