Алгебра 2

7.03.2011
Листок 5

Характеры

В этом листочке предполагается, что основное поле – поле комплексных чисел.

Задача 1. Выразите характеры представлений $\rho\oplus\tau$, ρ^*, $\mathrm{Hom}(\rho,\tau)$ и $\rho\otimes\tau$ через χ_ρ и χ_τ.

Задача 2.
Составьте таблицу характеров для неприводимых представлений следующих групп:
a°) S_4 b) A_4; c) Q;
d) D_n, где n нечётно; e) D_n, где n чётно.

Задача 3. Разложите, пользуясь таблицей характеров, на неприводимые компоненты следующие представления:

a°) S_4 в пространствах функций на вершинах и на рёбрах куба;

b) A_4 в пространствах функций на вершинах и на рёбрах куба;

c) S_3 в пространстве однородных многочленов степени n от двух переменных при представлении S_3 движениями треугольника;

d) S_4 в пространстве кубических форм на $\mathbb{C}^3$ при представлении S_4 вращениями куба.

Кольцо представлений $R(G)$ группы G над полем k определяется следующим образом. Как группа это фактор свободной абелевой группы, порождённой классами изоморфизма конечномерных представлений G над k, по соотношениям $[V]-[U]-[W]=0$, где $U\subset V$ – подпредставление, а W – соответствующее факторпредставление. Умножение на образующих определено так: $[V]\cdot[U]:=[V\otimes U]$.

Задача 4. a) Докажите, что умножение в кольце представлений определено корректно.

b) Докажите, что кольцо представлений – ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей. Есть ли в нём делители нуля?

c) Докажите, что кольцо представлений – свободная абелева группа, базис которой образуют классы изоморфизма неприводимых конечномерных представлений.

Задача 5. Вычислите кольцо представлений для следующих групп:
a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; b) S_3; c°) S_4;
d) D_n, где n нечётное; e) D_n, где n чётное.

Задача 6. Докажите, что при $n\geqslant 2$

$$\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\frac{\lambda_1^2}{2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}\cdot\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}=2,$$

где сумма берётся по всем решениям в $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ уравнения $\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n$.

Подсказка: как устроены классы сопряжённости в S_n?

Задача 7. Пусть χ_ρ – характер неприводимого представления $\rho\colon G\to GL(V_\rho)$, а $\tau\colon G\to GL(V)$ – произвольное представление. Докажите, что отображение $V\to V:$

$$p_\rho=\frac{\dim V_\rho}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g^{-1})\tau(g)$$

является проектором V на изотипическую компоненту $V^{(\rho)}$.