Алгебра 2 21.03.2011

Листок 7

Алгебраические расширения

Задача 1. Найдите степени следующих элементов над $\mathbb{Q}$:

a°) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$,

b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$,

c°) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$,

d) $\sqrt[12]{1}$ (первообразный корень),

e) $\sqrt[n]{2}$.

Задача 2. Пусть $f \in \mathsf{k}[x]$ – неприводимый многочлен степени 3 над полем характеристики 0, а K – поле разложения многочлена f над k.

a°) Докажите, что $[K:\mathsf{k}] = 3$ или 6.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни f в K, а $\delta = (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)$. Докажите, что

b°) $\delta^2 \in \mathsf{k}$, c) $\delta \in \mathsf{k} \Leftrightarrow [K:\mathsf{k}] = 3$.

d) Пусть $f(x) = x^3 - px - q$. Выразите δ через p и q.

e) Какова степень поля разложения многочленов x^3+x+1, x^3-4x+1, $x^3-36x-72$ над $\mathbb{Q}$?

Задача 3. Пусть $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ – различные простые числа. Положим $K = \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}]$.

a) Докажите, что существует автоморфизм K над $\mathbb{Q}$ такой, что $\sigma(\sqrt{p_i}) = \sqrt{p_i}$ при $i < n$ и $\sigma(\sqrt{p_n}) = -\sqrt{p_n}$.

b) Докажите, что $[K:\mathbb{Q}] = 2^n$.

Подсказка: воспользуйтесь индукцией.

Задача 4. a) Пусть α – корень неприводимого многочлена $f \in \mathsf{k}[x]$. Вычислите характеристический многочлен оператора умножения на α на пространстве $\mathsf{k}[a]$.

b) Пусть $\mathsf{k} \subset K$ – конечное расширение. След $\mathrm{tr}_{K/\mathsf{k}}(\alpha)$ и норма $\mathrm{nm}_{K/\mathsf{k}}(\alpha)$ элемента $\alpha \in K$ определяются как след и определитель оператора умножения на α на k-векторном пространстве K. Выразите след и норму через коэффициенты минимального многочлена α над k.

Задача 5. Пусть k – поле характеристики p, а $f(x) \in \mathsf{k}[x]$ – неприводимый многочлен.

a) Докажите, что $f(x)$ имеет вид $g(x^{p^m})$, где неприводимый многочлен $g(x)$ не имеет кратных корней над алгебраическим замыканием k.

b) Докажите, что количество различных корней f делит $\deg f$, а частное – степень числа p.