Алгебра 2 $\qquad$ 4.04.2011

Листок 9

Решение уравнений

В задачах этого листка основное поле k имеет характеристику 0.

Задача 1. Пусть $f(x) \in \mathsf{k}[x]$ – неприводимый многочлен третьей степени, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – его корни, K – его поле разложения, $G = Gal(K, \mathsf{k})$.

a) Приведите $f(x)$ заменой координат к виду $x^3 - px - q$.

b) Докажите, что $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, если $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1) \in \mathsf{k}$, и $G = S_3$ в противном случае. Докажите, что $Gal(K, \mathsf{k}[\delta]) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Пусть ξ – нетривиальный кубический корень из единицы. Положим

$$s_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2, \quad s_1 = \alpha_0 + \xi\alpha_1 + \xi^2\alpha_2, \quad s_2 = \alpha_0 + \xi^2\alpha_1 + \xi^4\alpha_2.$$

c°) Покажите, что $s_i^3 \in \mathsf{k}[\delta, \xi]$. Выразите s_i^3 через δ и коэффициенты f.

d°) Выразив α_i через s_j, напишите формулу[1] для корней кубического уравнения.

Задача 2. Пусть $f(x) \in \mathsf{k}[x]$ – неприводимый многочлен четвёртой степени, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – его корни, K – его поле разложения, $G = Gal(K, \mathsf{k})$.

a) Приведите $f(x)$ заменой координат к виду $x^4 + px^2 + qx + r$.

Пусть $V_4 \subset S_4$ – подгруппа, состоящая из пар транспозиций.

b) Покажите, что элементы

$$s_{00} = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \quad s_{01} = \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4, \quad s_{10} = \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4, \quad s_{11} = \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$$

поля K – собственные векторы относительно перестановок из V_4.

c) Пусть $F = K^{G\cap V_4}$. Покажите, что F/k – расширение Галуа, и группа

$$Gal(F, \mathsf{k}) \cong G/(G \cap V_4) \subset S_4/V_4 \cong S_3$$

действует перестановками на элементах $s_{01}^2, s_{10}^2, s_{11}^2 \in F$.

d) Составьте кубическое уравнение, корнями которого являются $s_{01}^2, s_{10}^2, s_{11}^2$. Выразите его коэффициенты через коэффициенты f.

e) Как решать уравнения четвёртой степени в радикалах[2]?

f^*) Какой может быть G в случае $\mathsf{k} = \mathbb{Q}$? Приведите примеры.

Задача 3. Пусть $f(x) \in \mathsf{k}[x]$ – неприводимый многочлен степени n, α_i – его корни, K – его поле разложения, $G = Gal(K, \mathsf{k})$. Докажите, что

a) $G \subset A_n$ титтк $\delta = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j) \in \mathsf{k}$;

b) $Gal(K, \mathsf{k}[\delta])$ состоит из чётных перестановок;

c) $\delta^2 \in \mathsf{k}$;

d) $\delta^2 = \pm Res(f, f')/a_n^{n(n-1)}$, где a_n – старший коэффициент f.

e^*) Чему равен знак в предыдущей формуле?

Задача 4. Выразите в радикалах от вещественных чисел a) $\cos\frac{2\pi}{5}$, b) $\cos\frac{2\pi}{9}$.

---

[1] Она называется *формулой Кардано*, в честь Джероламо Кардано, первым опубликовавшего её в 1545 г.)

[2] Первым эту задачу решил Луиджи Феррари в 1540-х годах.