Математический анализ, 2 семестр: листок 1

Рассмотрим отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Предположим что функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы достаточное число раз. Производные этих функций по t мы будем обозначать через $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Вектор $v(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ называется ***вектором скорости*** в момент времени t. Отображение γ называется ***гладкой кривой***, если $v(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

1. *Касательная* к кривой γ в точке $(x(t_0), y(t_0))$ определяется как прямая L, такая, что расстояние от точки $(x(t), y(t))$ до L равно $o(t - t_0)$ при $t \to t_0$. (Напомним, что $\alpha(t) = o(t - t_0)$ при $t \to t_0$, если $\lim_{t \to t_0} \alpha(t)/(t - t_0) = 0$). Найдите уравнение касательной к γ в точке $(x(t_0), y(t_0))$.

2. *Длиной* участка $\gamma[t_0, t_1]$ кривой γ называется число

$$L_\gamma[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|\, dt.$$

Здесь $|v(t)|$ — это длина вектора $v(t)$. Докажите, что это число не зависит от параметризации, то есть если $\phi : [\tau_0, \tau_1] \to [t_0, t_1]$ — гомеоморфизм (дифференцируемый на (τ_0, τ_1), причем производная продолжается до непрерывного отображения из $[\tau_0, \tau_1]$ в $[t_0, t_1]$) то $L_{\gamma \circ \phi}[\tau_0, \tau_1] = L_\gamma[t_0, t_1]$.

3. На всякой гладкой кривой γ можно ввести параметр s, такой что $s = L_\gamma[0, s]$. Такой параметр называется *натуральным.* Параметр t является натуральным тогда и только тогда, когда $|\dot{\gamma}(t)| = 1$.

4. Пусть s — натуральный параметр на кривой $\gamma(s) = (x(s), y(s))$. Положим $v(s) = \frac{d}{ds}\gamma(s)$, $a(s) = \frac{d}{ds}v(s)$ (производная вектор-функции вычисляется покомпонентно). Докажите, что векторы $v(s)$ и $a(s)$ перпендикулярны.

5. Функция $\kappa(s) = |a(s)|$ называется *кривизной* кривой γ. Положим $n(s) = a(s)/\kappa(s)$. Докажите, что $\frac{d}{ds}n(s) = -\kappa(s)v(s)$ (*формула Френе*).

6. Пусть s — натуральный параметр на кривой $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, причем $\gamma(0) = (0, 0)$ и $v(0) = (1, 0)$. Выпишите многочлены Тэйлора для $x(s)$ и $y(s)$ степени три в терминах функции $\kappa(s)$ и ее производных.

7. Пусть кривизна кривой γ в точке $\gamma(s_0)$ отлична от нуля: $\kappa(s_0) \neq 0$. Найдите окружность δ, для которой $|\gamma(s) - \delta(s)| = o((s - s_0)^2)$. Здесь мы предполагаем, что s является натуральным параметром на окружности δ.

8. Найдите формулу для кривизны кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ через производные функций $x(t)$ и $y(t)$. Параметр t не обязательно натуральный. Посчитайте кривизну параболы $y = x^2$ как функцию от x.

9. Пусть s — натуральный параметр на кривой $\gamma(s)$, причем $\gamma(s + 1) = \gamma(s)$ (то есть кривая γ замкнута). Докажите, что

$$\int_0^1 (Ax(s) + By(s) + C)\frac{d\kappa(s)}{ds} ds = 0$$

для любых постоянных A, B и C.

10. *Теорема о четырех вершинах.* Докажите, что на любой простой замкнутой гладкой кривой, кривизна которой нигде не обращается в 0, не менее четырех *вершин*, то есть таких точек $\gamma(s)$, для которых $\frac{d}{ds}\kappa(s) = 0$. (Замкнутая кривая γ простая, если $\gamma(s) = \gamma(s')$ тогда и только тогда, когда $s' - s \in \mathbb{Z}$).

Математический анализ, 2 семестр: листок 2

Напомним, что ***нормой*** на векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ называется функция $v \in V \mapsto ||v|| \geq 0$ со следующими свойствами: $||\lambda v|| = |\lambda|\,||v||$, $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$, v, $w \in V$, а $||v|| = 0$ только если $v = 0$. На пространстве $C[0,1]$ всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ со значениями в $\mathbb{R}$ можно ввести следующие нормы:

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad ||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \quad ||f||_2 = \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

11. Приведите пример фундаментальной последовательности в пространстве $C[0,1]$ с нормой $||\cdot||_1$, которая не имеет предела. Та же задача для нормы $||\cdot||_2$.

Гиперплоскостью в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ называется векторное подпространство $W \subset V$, заданное как множество $\{v \in V \,|\, l(v) = 0\}$ для некоторого линейного функционала $l : V \to \mathbb{R}$, не равного тождественно нулю.

12. Приведите пример гиперплоскости в нормированном пространстве V, всюду плотной в V (т.е. пересекающей любое непустое открытое подмножество в V).

13. Докажите, что любая гиперплоскость в V либо замкнута, либо всюду плотна. Гиперплоскость $\{v \in V \,|\, l(v) = 0\}$ замкнута тогда и только тогда, когда линейный функционал l непрерывен.

Непрерывное линейное отображение $A : V \to W$ нормированных пространств имеет конечную ***норму*** $||A|| = \sup_{x\in V,\,||x||=1} ||Ax||$.

14. Пусть линейные операторы $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задаются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Найдите нормы операторов A и B относительно следующих норм на $\mathbb{R}^2$:

$$||x||_\infty = \max(|x_1|, |x_2|), \quad ||x||_1 = |x_1| + |x_2|, \quad ||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

15. Пусть B — оператор из предыдущей задачи. Существует ли такая норма на $\mathbb{R}^2$, относительно которой этот оператор будет сжимающим?

16. Пусть $A : U \to V$ и $B : V \to W$ — линейные непрерывные отображения нормированных пространств. Докажите, что $||B \circ A|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

17. Пусть V и W — нормированные пространства, а $\mathrm{Hom}(V,W)$ — векторное пространство, состоящее из всех линейных непрерывных отображений из V в W. Докажите, что норма оператора определяет структуру нормированного пространства на $\mathrm{Hom}(V,W)$.

18. Пусть U, V и W — нормированные пространства, а $B : U \times V \to W$ — билинейное отображение (т.е. отображение, линейное по каждому аргументу при любом фиксированном значении другого аргумента). Докажите, что B непрерывно тогда и только тогда, когда существует такая константа $C > 0$, что

$$||B(u,v)|| \leq C||u|| \cdot ||v||.$$

Точная нижняя грань таких C называется ***нормой*** отображения B и обозначается через $||B||$.

19. Отождествим $\mathbb{C}$ с $\mathbb{R}^2$. Пусть $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — обычное умножение комплексных чисел. Найдите норму отображения B, предполагая, что $\mathbb{R}^2$ наделено нормами из задачи 14.

1. Математический анализ, 2 семестр: листок 3

Пусть $f : V \to W$ — отображение нормированных пространств, и $v \in V$. *Производной отображения f по направлению v в точке $x \in V$* называется вектор

$$L_v f(x) = \frac{d}{dt} f(x+vt)|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+vt)-f(x)}{t} \in W$$

Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в пространстве $V = \mathbb{R}^n$, а $(x_1, \ldots, x_n)$ — соответствующая этому базису система координат, то производная $L_{e_i} f(x)$ по направлению e_i называется *частной производной отображения f по координате x_i*, и обозначается через $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

20. Существует ли разрывная функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для которой существуют обе частные производные во всех точках?

21. Существует ли разрывная функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для которой в каждой точке существуют производные по всем направлениям?

22. Рассмотрим $\mathbb{C}$ как вещественное векторное пространство. Найдите производную функции $z \mapsto |z|$ по направлению $w \in \mathbb{C}$.

23. Пусть V — нормированное пространство; определим отображение $f : End(V) \to End(V)$ формулой $f(A) = A \circ A \circ A$. Найдите производную отображения f по направлению $B \in End(V)$.

Отображение $f : V \to W$ называется *дифференцируемым* в точке $x \in V$, если существует линейное непрерывное отображение $A : V \to W$, такое что $f(x+v) = f(x) + A(v) + \alpha(x,v)$, где $\lim_{v\to 0} \frac{||\alpha(x,v)||}{||v||} = 0$.

24. Приведите пример функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, которая непрерывна в точке $(0,0)$ и дифференцируема по любому направлению в этой точке, но не дифференцируема в этой точке.

25. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Выразите частные производные функции $g(x,y) := f(x^2 + xy\sin y)$ через $a(x,y) := f'(x^2 + xy\sin y)$.

26. Найдите дифференциал отображения $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, заданного формулой $f(z,w) = (zw, \overline{z}w^2)$, в точке $(1,i)$ ($\mathbb{C}^2$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{R}$).

27. Рассмотрим функцию на пространстве $C[0,1]$, заданную формулой

$$\phi \mapsto \int_0^1 \phi(x)^2 \sin x\, dx.$$

Дифференцируема ли эта функция в точке $\phi = id$ (т.е. $\phi(x) = x$)? Если да, то найдите дифференциал.

28. Рассмотрим функцию на пространстве $C^1[0,1]$, заданную формулой

$$\phi \mapsto \int_0^1 x^2(1-x)^2 \phi'(x)^2 dx.$$

Дифференцируема ли эта функция в точке $\phi(x) = x^2$? Если да, то найдите дифференциал. *Указание:* воспользуйтесь формулой интегрирования по частям.

29. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является многочленом, то f дифференцируема во всех точках.

Математический анализ, 2 семестр: листок 4

30. Пусть $\mathbb{R}^2$ — плоскость с координатами (x, y), а $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — отображение, такое что частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ определены в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ и непрерывны в этой точке. Тогда f дифференцируемо в точке $(0, 0)$.

31. Пусть $\mathbb{R}^2$ — плоскость с координатами (x, y), а $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — отображение, такое что смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ определены в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ и непрерывны в этой точке. Тогда эти производные совпадают.

32. Приведите пример отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, такого, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0),$$

и при этом обе части этого неравенства существуют.

33. Пусть $f : V \to W$ — отображение нормированных пространств. Рассмотрим выпуклое подмножество $U \subset V$, и предположим, что f дифференцируемо всюду на U. Докажите, что

$$||f(a) - f(b)|| \leq \sup_{x \in U} ||d_x f|| \cdot ||a - b||$$

для любых двух точек a, $b \in U$.

34. Пусть U — выпуклая (необязательно ограниченная) область в $\mathbb{R}^n$ и $F : U \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение, причем $F(x) = x + f(x)$ и $||d_x f|| < 1$ для всех $x \in U$. Тогда $x_1 \neq x_2$ влечет $F(x_1) \neq F(x_2)$.

35. Найдите минимум функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданной формулой

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 5x^2 + 7y^2.$$

36. *Задача о брахистохроне.* Предположим, что среди всех гладких кривых класса C^2 на плоскости, начинающихся в точке $(0, 0)$, лежащих (кроме этой точки) в верхней полуплоскости и заканчивающихся в точке $(1, 1)$, существует кривая $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, для которой s — натуральный параметр, и такая, что значение интеграла

$$\int_0^L \frac{ds}{\sqrt{y(s)}}$$

минимально. Здесь L — это длина кривой γ. Найдите такую кривую γ. Опишите ее физический смысл.

37. *Геодезические в модели Пуанкаре.* Предположим, что среди всех гладких кривых класса C^2 в верхней полуплоскости найдется такая кривая $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, соединяющая точки $(0, 1)$ и $(1, 1)$, для которой s — натуральный параметр, и значение интеграла

$$\int_0^L \frac{ds}{y(s)}$$

минимально. Здесь L — это длина кривой γ. Найдите такую кривую γ.

38. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, а $F : U \to \mathbb{R}^m$, $m \leq n$ — гладкое отображение, причем $d_x F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию $\phi_a(x) = |F(x) - a|^2$ (квадрат евклидового расстояния), где $a \in \mathbb{R}^m$ — фиксированная точка в $\mathbb{R}^m$. Докажите, что точка x_0 является критической точкой функции ϕ (то есть $d_{x_0} \phi = 0$) тогда и только тогда, когда $F(x_0) = a$.

Математический анализ, 2 семестр: листок 5

39. Пусть $f : V \to W$ — непрерывное отображение нормированных пространств, дифференцируемое всюду, кроме 0, и такое что $d_x f$ стремится к некоторому линейному непрерывному отображению L в пространстве $Hom(V, W)$ при $x \to 0$. Докажите, что отображение f дифференцируемо в точке 0, и что $d_0 f = L$.

40. Докажите следующий вариант формулы Тэйлора порядка два: пусть отображение $f : V \to W$ дифференцируемо дважды в точке a. Тогда

$$f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \frac{1}{2} d_a^2 f(x-a, x-a) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)/||x||^2 \to 0$ при $x \to 0$.

41. В условиях предыдущей задачи, предположим, что отображение f дважды дифференцируемо во всех точках отрезка $[a, a+x]$, причем норма второго дифференциала в этих точках не превосходит числа $M > 0$. Тогда

$$||f(x) - f(a) - d_a f(x-a)|| \leq \frac{M}{2} ||x-a||^2.$$

42. Сформулируйте и докажите обобщения двух предыдущих задач на случай многочленов Тэйлора произвольной степени.

Билинейная симметрическая форма $B : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *положительно определенной*, если $B(v, v) > 0$ для любого ненулевого вектора $v \in V$.

43. Пусть V — конечномерное нормированное векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $B : V \times V \to \mathbb{R}$ — положительно определенная симметрическая билинейная форма. Докажите, что $B(v, v) \geq C||v||^2$ для всех $v \in V$, где $C > 0$ — некоторое фиксированное число.

44. Пусть $f : V \to \mathbb{R}$ — дифференцируемое отображение нормированных пространств, причем $d_0 f = 0$, и билинейная форма $d_0^2 f$ положительно определена. Если V конечномерно, то 0 является точкой локального минимума функции f.

45. Приведите контрпример к утверждению предыдущей задачи в случае, когда пространство V бесконечномерно.

Рассмотрим дифференцируемую функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Точка (x_0, y_0) называется *седловой* для функции f, если в произвольно малой окрестности этой точки функция $f - f(x_0, y_0)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

46. Найдите все критические точки функции $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$. Для каждой из критических точек, определите, к какому типу она относится (локальный минимум, локальный максимум, седло). Та же задача для функции $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$.

47. Может ли дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ иметь ровно три критические точки, одна из которых — точка локального максимума, другая — точка локального минимума, а третья — седловая?

Математический анализ, 2 семестр: листок 6

48. Пусть $y(x)$ — функция, заданная неявным уравнением $f(x, y) = 0$, где f — функция от двух переменных, дифференцируемая достаточное число раз. Выразите производную $y'''(x)$ через частные производные фунции f.

Обозначим через Γ поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданную уравнением $f(x, y, z) = 0$, в котором f — дифференцируемая достаточное число раз функция (строго говоря, мы будем говорить не только про поверхность, но и про само уравнение). Напомним, что поверхность Γ называется *неособой* в точке $p \in \Gamma$, если в этой точке $df \neq 0$.

49. Докажите, что если $p \in \Gamma$ — неособая точка, то найдется двумерная плоскость, такая, что евклидово расстояние от точки $q \in \Gamma$ до этой плоскости, деленное на расстояние между p и q, стремится к нулю при $q \to p$. Эта плоскость называется *аффинной касательной плоскостью* к Γ. Выпишите уравнение аффинной касательной плоскости.

50. Если $p \in \Gamma$ — неособая точка, и аффинная касательная плоскость к Γ в точке p не параллельна координатной оси z, то существует дифференцируемая функция h (определенная на некотором открытом подмножестве плоскости), такая, что Γ совпадает с графиком функции h в некоторой окрестности точки p.

51. Предположим, что $U \subseteq \mathbb{R}$ — связное открытое подмножество, и функция $f : U \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $f''(x) > 0$ для всех $x \in U$. Докажите, что множество всех касательных прямых к графику функции f полностью определяет функцию f. Более того, множество касательных прямых может быть параметризовано как $y = px - g(p)$, то есть в качестве параметра p можно взять тангенс угла наклона касательной, а $g(p) = \hat{f}(p)$ — некоторая функция от p, определенная на открытом связном множестве $\hat{U}$ значений параметра p. Эта функция называется *преобразованием Лежандра* функции f.

52. В предположениях предыдущей задачи докажите, что $\hat{f}''(x) > 0$ для всех $x \in \hat{U}$.

53. Вычислите преобразование Лежандра функций (a) $f(x) = e^x$, (b) $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$.

54. Докажите неравенство Юнга: $f(x) + \hat{f}(p) \geq px$. Выведите отсюда, что

$$\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta} \geq px \quad \text{если} \quad \alpha, \beta > 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

55. Проверьте, что преобразование Лежандра функции $\hat{f}$ совпадает с функцией f.

56. Определите преобразование Лежандра для функций двух переменных и докажите для него аналоги утверждений из задач 51, 52, 55.

57. Рассмотрим гладкую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$$

Предположим, что функция u допускает преобразование Лежандра $\hat{u}$. Найдите уравнение с частными производными, которому удовлетворяет функция $\hat{u}$.

58. Найдте максимум функции $f(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ при x, y, $z > 0$, $x+y+z = 1$. Показатели степеней α, β, γ — фиксированные положительные числа.

Математический анализ, 2 семестр: листок 7

На лекции, мы определили интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с компактным носителем, а также интеграл $\int_P f(x)dx$ для выпуклого многогранника P и непрерывной функции $f : P \to \mathbb{R}$ (кратный интеграл определялся как повторный; мы доказали независимость от порядка интегрирования).

Пусть P — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$. *Объемом* (точнее, n-мерным объемом) многогранника P называется интеграл

$$\mathrm{Vol}_n(P) = \int_P 1 \cdot dx_1 \dots dx_n.$$

59. Посчитайте объем симплекса, заданного в $\mathbb{R}^n$ неравенствами

$$x_1 \geq 0, \ \dots \ , x_n \geq 0, \quad x_1 + \dots + x_n \leq 1.$$

60. Найдите интеграл функции $f(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n)$ по единичному кубу $0 \leq x \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1$.

Суммой двух подмножеств A, $B \subset \mathbb{R}^n$ *по Минковскому* называется множество $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Произведение множества A на число λ определяется как $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$.

61. Пусть A и B — выпуклые многоугольники на плоскости. Докажите, что $\mathrm{Vol}_2(\alpha A + \beta B)$ является многочленом второй степени от α и β.

62. Распространите утверждение предыдущей задачи на выпуклые многогранники произвольной размерности.

63. * Пусть A, B, C — три попарно непараллельных отрезка на плоскости. Найдите индекс квадратичной формы $\mathrm{Vol}_2(\alpha A + \beta B + \gamma C)$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — компактное подмножество. Определим объем $\mathrm{Vol}_n(A)$ множества A как $\inf \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$, где нижняя грань берется по всем неотрицательным непрерывным функциям с компактным носителем, таким, что $f(x) = 1$ для всех $x \in A$.

64. Найдите объем n-мерного шара радиуса 1.

65. Пусть P — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что объем ε-окрестности P_ε многогранника P при $\varepsilon > 0$ совпадает с некоторым многочленом степени 3 от ε. Выразите коэффициенты этого многочлена через геометрические инварианты многогранника P.

Ориентацией пространства $\mathbb{R}^n$ называется класс эквивалентности базисов относительно следующего отношения эквивалентности: два базиса эквивалентны, если один переводится в другой линейным преобразованием с положительным определителем.

66. Докажите, что два базиса эквивалентны, если и только если их можно соединить непрерывной кривой в пространстве всех базисов с метрикой Хаусдорфа.

67. Пусть $a_0, \dots, a_n$ — система точек в $\mathbb{R}^n$, такая, что векторы $a_i - a_0$, $i = 1, \dots, n$ линейно независимы. Пусть σ — перестановка множества $\{0, \dots, n\}$. Базис $a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(0)}$ задает ту же ориентацию, что и базис $a_i - a_0$ тогда и только тогда, когда перестановка σ четная.

Математический анализ, 2 семестр: листок 8

68. Пусть γ — верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. Докажите, что интеграл $\int_\gamma (dx^4 + dy^4)^{1/4}$ не зависит от ориентации кривой γ. Перепишите этот интеграл в виде $\int_0^1 f(t)dt$ для некоторой конкретной функции f.

69. Найдите дифференциал 1-формы $x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x_1\,dx_3$ (здесь x_1, x_2, x_3 — координаты в $\mathbb{R}^3$).

70. Пусть α — 2-форма в $\mathbb{R}^n$, а u, v, $w \in \mathbb{R}^3$ — (постоянные) векторы. Докажите, что

$$d\alpha(u, v, w) = L_u\alpha(v, w) - L_v\alpha(u, w) + L_w\alpha(u, v).$$

Это равенство следует понимать как равенство двух функций на $\mathbb{R}^n$.

71. Пусть α_1 и α_2 — 1-формы. Проверьте, что

$$d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = d\alpha_1 \wedge \alpha_2 - \alpha_1 \wedge (d\alpha_2).$$

72. Докажите, что объем выпуклого многогранника P в $\mathbb{R}^3$ равен абсолютной величине интеграла

$$\int_{\partial P} x_1\,dx_2 \wedge dx_3.$$

73. Пусть s — любая дуга гиперболы $x_1x_2 = 1$, лежащая в положительном (первом) квадранте. Обозначим через A площадь множества точек, лежащих под дугой s и выше горизонтальной оси, а через B площадь множества точек, лежащих слева от дуги s и правее вертикальной оси. Докажите, что $A = B$.

74. Пусть $vol = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Определим 2-форму α на $\mathbb{R}^3$ формулой $\sigma_x(v, w) = vol_x(x, v, w)$. Выпишите форму σ в координатах.

75. Пусть S — поверхность единичной сферы. Вычислите интеграл $\int_S \sigma$.

76. Вычислите интегралы $\int_S x_1\sigma$, $\int_S x_1^2\sigma$.

77. Пусть $U(x)$ — вектор, гладко зависящий от точки $x \in \mathbb{R}^3$ (то есть *векторное поле* на $\mathbb{R}^3$). Определим 2-форму $\iota_U vol$ формулой $\iota_U vol_x(v, w) = vol_x(U(x), v, w)$. Интеграл $\int_S \iota_U vol$ называется *потоком вектора* U через сферу S. Выразите поток вектора U через S через интеграл по единичному шару.

78. Пусть u и v — гладкие функции на $\mathbb{R}^3$. Докажите *первую формулу Грина*: поток вектора $u\nabla v = (u\frac{\partial v}{\partial x_1}, u\frac{\partial v}{\partial x_2}, u\frac{\partial v}{\partial x_3})$ через поверхность S равен интегралу

$$\iiint \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + u\frac{\partial^2 v}{\partial {x_i}^2} \right) vol$$

по единичному шару $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$.

79. Гладкая функция $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ называется *гармонической* в области $G \subset \mathbb{R}^3$, если она имеет непрерывные вторые производные в области G и удовлетворяет в этой области *уравнению Лапласа* $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$. Докажите, что если u гармонична в окрестности единичного шара, то

$$u(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_S u\sigma.$$

80. Пусть $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, такая, что $dg \neq 0$ в точках, где $g = 0$. Сведите интеграл

$$\iint_{g=0} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial g}{\partial x_3} dx_1 \wedge dx_2 \right)$$

к интегралу по множеству $g < 0$.