Комплексные многообразия,

лекция 14: спиноры

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

28 марта 2011

Алгебры Клиффорда

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V, g – векторное пространство над $k := \mathbb{C}, \mathbb{R}$ с билинейной, симметричной 2-формой, а $\mathcal{C}\ell(V, g)$ – алгебра с единицей, полученная как фактор **тензорной алгебры** $T^{\otimes}V := k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ... \oplus T^{\otimes i}V$ по идеалу, порожденному $xy + yx = g(x, y)$, где $x, y \in V$. Алгебра $\mathcal{C}\ell(V, g)$ называется **алгеброй Клиффорда**.

ПРИМЕР: Если $g = 0$, $\mathcal{C}\ell(V, g)$ есть алгебра Грассманна.

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\dim \mathcal{C}\ell(V, g) = 2^{\dim V}$.

ТЕОРЕМА: **(периодичность Ботта над $\mathbb{C}$)**

$$\mathcal{C}\ell(V, g) \cong \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n}$ и

$$\mathcal{C}\ell(V, g) \cong \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n+1}$ (g невырожденная). ■

Спинорная группа (четномерные пространства)

ТЕОРЕМА: Группа автоморфизмов алгебры $\operatorname{Mat}(V)$ изоморфна $PGL(V)$ (фактора группы $GL(V)$ по центру).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $V = \mathbb{C}^{2n}$, - векторное пространство над $\mathbb{C}$ с невырожденным скалярным произведением. Группа Ли $SO(V)$ действует на $\mathcal{C}\ell(V)$ автоморфизмами, что задает гомоморфизм

$$SO(V) \hookrightarrow \operatorname{Aut}(\operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})) = PGL(2^n, \mathbb{C})$$

в силу теоремы, доказанной выше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Эли Картан, 1913) **Спинорное представление** алгебры Ли $\mathfrak{so}(V)$ есть ее представление в $\mathbb{C}^{2^n}$, заданное изоморфизмом $\mathfrak{pgl}(2^n) = \mathfrak{sl}(2^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спинорная группа** $\operatorname{Spin}(2n)$ есть накрытие $SO(2n)$, полученное интегрированием спинорного представления.

Спинорная группа (нечетномерные пространства)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для нечетномерного $V = \mathbb{C}^{2n+1}$, **$+$-спинорное представление $\mathfrak{so}(V)$** есть действие $\mathfrak{so}(V)$ в $\mathbb{C}^{2^n}$, полученное из изоморфизма $\mathcal{C}\ell^+(V) = \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})$ и $\mathrm{Aut}(\mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})) = PGL(2^n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{pgl}(2^n) = \mathfrak{sl}(2^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$-$-спинорное представление $\mathfrak{so}(V)$** определяется аналогично.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Эти представления **переводятся одно в другое сопряжением с любым элементом $O(V)\backslash SO(V)$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спинорная группа** $\mathrm{Spin}(2n+1)$ есть накрытие группы $SO(2n+1)$, полученное интегрированием $+$- или $-$-спинорного представления.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу предыдущего утверждения, эти представления изоморфны.

Спинорная группа (явная конструкция)

ЛЕММА: Рассмотрим отображение $\mathfrak{so}(V) \xrightarrow{\Psi} C\ell(V)$ переводящее 2-форму $x \wedge y \in \mathfrak{so}(V) = \Lambda^2 V$, $x \perp y$ в $xy \in C\ell(V)$. **Это гомоморфизм алгебр Ли.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обозначим за L_x умножение на $x \in V$ в $C\ell(V)$. Если $\langle x, y\rangle \perp \langle z, t\rangle$, то $[xy, zt] = 0$, так как L_a, L_b **антикоммутируют для** $a \perp b$**.** Для попарно ортогональных x, y, t, имеем $[xy, xt] = -2ytg(x, y)$. ■

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $x \perp y$ лежат в V. **Докажите, что** $[xy, \cdot]$ **сохраняет** $V \subset C\ell(V)$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $C\ell(V)^*$ группу всех обратимых элементов в $C\ell(V)$.

ТЕОРЕМА: $\operatorname{Spin}(V)$ **изоморфна группе всех элементов в группе** $C\ell(V)^*$**, удовлетворяющих** $g(V) \subset V$**,** и действующих на V с сохранением ориентации и скалярного произведения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Предыдущая лемма показывает, что $\operatorname{Spin}(V) \subset C\ell(V)^*$ **порождена элементами вида** $e^{xy} \in C\ell(V)$**, где** $x \perp y$ **лежат в** V**.** Поскольку $[xy, \cdot]$ сохраняет V, группа $\operatorname{Spin}(V)$ сохраняет V.

Обратное включение получается из соображений размерности. ■

Пинорная группа

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $x \in V$ – вектор длины 1. Тогда $x^2 = 1$, и $y \longrightarrow x^{-1}yx$ **действует на V отражениями относительно x.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа $\operatorname{Pin}(V)$ **(пинорная группа)** есть подгруппа $\mathcal{C}\ell(V)^*$, порожденная умножениями на вектора $x \in V$ длины 1.

ЗАМЕЧАНИЕ: Эта группа несвязна и является накрытием $O(V)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Связная компонента $\operatorname{Pin}(V)$ равна $\operatorname{Spin}(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\operatorname{Pin}(V)$ сюрьективно отображается в $O(V)$, ибо содержит все отражения. Значит, соответствующее отображение связных компонент сюрьективно. Его ядро K состоит из скаляров, что ясно из классификации автоморфизмов матричной алгебры. Поскольку определитель умножения на x равен 1, K тривиально. ■

СЛЕДСТВИЕ: Накрытие $\operatorname{Spin}(V) \longrightarrow SO(V)$ нетривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать аналогичное утверждение для $\operatorname{Pin}(V)$, но x и $-x$ принадлежат одной и той же компоненте связности $\operatorname{Pin}(V)$ и переводятся в одну и ту же изометрию V. ■

Спиноры над $V = W \oplus W^*$

ПРИМЕР: Пусть $V = W \oplus W^*$, с естественной метрикой. Тогда $\mathcal{C}\ell(W) = \Lambda^* W$, $\mathcal{C}\ell(W^*) = \Lambda^* W^*$ и имеет место разложение $\mathcal{C}\ell(W) = \Lambda^* W \otimes \Lambda^* W^* = \Lambda^* V$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим действие $\Lambda^* W$ на $\Lambda^* W$ внешними умножениями, $x, y \longrightarrow x \wedge y$, и $\Lambda^* W^*$ на $\Lambda^* W$ подстановкой, $x, \xi \longrightarrow x \lrcorner \xi$. **Это задает на $\Lambda^* W$ структуру $\mathcal{C}\ell(V)$-модуля.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить на образующих: $\omega \wedge x \wedge y = -\omega \wedge y \wedge x$, $(\omega \lrcorner \xi) \lrcorner \zeta = -(\omega \lrcorner \zeta) \lrcorner \xi$, и

$$(\omega \wedge x) \lrcorner \xi + (\omega \lrcorner \xi) \wedge x = \omega \langle x, \xi \rangle.$$

■

СЛЕДСТВИЕ: **$\Lambda^* W$ канонически отождествляется со спинорным представлением** $\operatorname{Spin}(W \oplus W^*)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Лагранжево подпространство** в векторном пространстве со скалярным произведением g есть подпространство половинной размерности, на которое g ограничивается тривиально. Разложение $V = W_1 \oplus W_2$ в прямую сумму лагранжевых подпространств называется **лагранжевым разложением**.

Spin^c-структуры и Spin-структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – четномерное риманово многообразие, $\mathcal{C}\ell(TM)$ – соответствующее расслоение клиффордовых алгебр, а $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(TM)$ – его комплексификация. **Spin^c-структура** на M есть расслоение $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(TM)$-модулей **($\mathbb{C}$-спиноров)**, которые изоморфны, как $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(TM)$-модули, спинорному представлению.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Spin^c-структура определена канонически с точностью до подкрутки на линейное расслоение.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – почти комплексное эрмитово многообразие. Тогда $\Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{0,1}(M)$ – лагранжево разложение $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Это задает структуру $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(TM)$-модуля на $\Lambda^*(\Lambda^{1,0}(M)) = \Lambda^{*,0}(M)$.

СЛЕДСТВИЕ: **На почти комплексном эрмитовом многообразии задана стандартная Spin^c-структура.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Spin-структура** на многообразии есть Spin^c-структура такая, что ее детерминантное расслоение $\det E$ тривиально. В этом случае E называется **расслоением спиноров**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть – почти комплексное эрмитово многообразие, его каноническое расслоение, а $L = K^{-1/2}$ линейное расслоение, такое, что $K \cong L^{-1}$. **Тогда на задана Spin-структура $E \cong \Lambda^{*,0}(M) \otimes L$.**

Главные G-расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Главное G-расслоение** есть гладкое расслоение $X \longrightarrow M$ со свободным действием группы Ли G, транзитивным на слоях.

ПРИМЕР: Пусть B – n-мерное векторное расслоение. **Расслоение реперов** в B есть главное $GL(n)$-расслоение, слой которого в $m \in M$ есть пространство реперов в $B_m M$.

ПРИМЕР: Если на B задана метрика, **расслоение ортогонормированных реперов** есть главное $O(n)$-расслоение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расслоенное произведение** пространств M_1, M_2 с действием G есть фактор $M_1 \times_G M_2 := (M_1 \times M_2)/G$ по диагональному действию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть P есть G-расслоение, а V – представление G. **Ассоциированное векторное расслоение** есть $P \times_G V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $TM = RM \times_{GL(n)} \mathbb{R}^n$, где RM есть расслоение реперов, а $\mathbb{R}^n$ – фундаментальное представление $GL(n)$. **Это позволяет восстановить TM по соответствующему главному G-расслоению.**

Редукция главных G-расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G_1 \longrightarrow G$ – гомоморфизм групп. **Редукция** G-расслоения P к G_1 есть главное G_1-расслоение P_1 такое, что $P_1 \times_{G_1} G = P$.

ПРИМЕР: Расслоение ортогонормированных реперов задает редукцию главного $GL(n)$-расслоения к $O(n)$-расслоению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **G-структура на гладком многообразии M** есть редукция главного $GL(n)$-расслоения реперов на M к G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Структурной группой риманова многообразия** называется главное $O(n)$-расслоение, связанное с римановой структурой.

Главные расслоения и Spin^c-структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексная спинорная группа** $\operatorname{Spin}^c(n)$ есть группа вида $\Big[\operatorname{Spin}(n) \times U(n)\Big]/\pm 1$, где -1 отображается в -1 в $U(1)$ и в центр в $\operatorname{Spin}(n)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Есть взаимно-однозначное соответствие между **редукциями структурной группы** $SO(n)$ **ориентированного риманова многообразия** M **к** $\operatorname{Spin}^c(n)$, и Spin^c**-структурами на** M**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим главное $\operatorname{Spin}^c(n)$-расслоение, полученное как редукция структурного $O(n)$-расслоения при отображении $\operatorname{Spin}^c(TM) \longrightarrow O(TM)$, переводящем элемент спинорной группы в соответствующий эндоморфизм TM. **Это дает редукцию к** $\operatorname{Spin}^c(n)$ **из** Spin^c**-структуры.**

Обратное соответствие оставим в качестве упражнения. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Есть взаимно-однозначное соответствие между редукциями структурной группы** $SO(n)$ **ориентированного риманова многообразия** M **к** $\operatorname{Spin}(n)$**, и** Spin**-структурами на** M**.**

Доказательство аналогично.

Связности и G-структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть P – главное G-расслоение, V – точное представление G, а B – ассоциированное векторное расслоение. Связность ∇ на B называется **G-инвариантной**, если для любого $g \in G$ и любого базиса $\xi_1, ...\xi_n$ в $B|_m$, любой параллельный перенос относительно ∇ переводит $\xi_1, ...\xi_n$ в $g(\xi_1), ..., g(\xi_n)$, для какого-то $g \in G$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Другими словами, ∇ **согласована с G, если голономия ∇ лежит в G.**

ЗАМЕЧАНИЕ: **Две связности, согласованные с G, отличаются на 1-форму вида $A \in \Lambda^1(M) \otimes \mathfrak{g}$,** где $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G)$ – алгебра Ли инфинитезимальных преобразований B, индуцированных G.

Связность на G-расслоениях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность ∇ на главном G-расслоении P есть G-инвариантное расщепление касательного TP в прямую сумму $TP = T_\nabla P \oplus T_{\text{vert}} P$, где $T_{\text{vert}} P$ – касательные вектора к слоям $P \longrightarrow M$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Связности на главном G-расслоении P **взаимно однозначно соответствуют G-инвариантным связностям на ассоциированном векторном расслоении**, для любого точного представления G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Докажите самостоятельно. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – риманово многообразие с ортогональной связностью. **Тогда на расслоении спиноров задана каноническая связность,** которая называется **спинорной связностью**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Соответствующая G-структура получается из стандартной $SO(n)$-структуры накрытием, значит, **связностей у них столько же.** ■

Оператор Дирака

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово многообразие с заданной на нем Spin-структурой, а $\nabla: S \longrightarrow S \otimes \Lambda^1 M$ – соответствующая связность на спинорах. Отождествив $\Lambda^1 M$ и TM, можно считать, что $\nabla: S \longrightarrow S \otimes TM$. Рассмотрим оператор **спинорного умножения** $S \otimes TM \xrightarrow{\sigma} S$. **Оператор Дирака** D есть композиция $\nabla: S \longrightarrow S \otimes TM$ и σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гармонический спинор** есть спинор ψ такой, что $D(\psi) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Скалярная кривизна** риманова многообразия есть след тензора кривизны, $Sc := \operatorname{Tr}_{13} \operatorname{Tr}_{24} R_{1234}$.

ТЕОРЕМА: (Бохнер) Пусть M – компактное многообразие с положительной скалярной кривизной. **Тогда все гармонические спиноры на M равны нулю.** Если у M нулевая скалярная кривизна, **все гармонические спиноры на M параллельны.**

ТЕОРЕМА: На многообразии Калаби-Яу, **гармонические $(p, 0)$-формы отождествляются с гармоническими спинорами.**