ЛИСТОК 2

1. Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ — целая функция.

a) Если $|f(z)| < M(\log|z|)^N$ при $|z| > e$ для некоторых $M > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, то функция f постоянна.

b) Если $|f(z)| < M|z|^N$ при $|z| > 1$ для некоторых $M > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, то функция f — многочлен степени не выше N.

2. Пусть функция f голоморфна в окрестности замкнутого круга $\overline{\Delta} = \{|z| \le 1\}$.

a) $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta$ (теорема о среднем).

b) $f(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\overline{\Delta}} f(x+iy)\,dx\,dy$ (еще одна теорема о среднем).

c) $|f(0)| \le \pi^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\overline{\Delta})}$ для любого $p \ge 1$, где $\|f\|_{L^p(\overline{\Delta})} := \Big(\int\limits_{\overline{\Delta}} |f|^p\,dx\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}$.

d) Как изменятся утверждения a)–c), если вместо единичного круга взять круг радиуса $r > 0$?

3. Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ голоморфна в единичном круге $\Delta = \{|z| < 1\}$. Докажите, что

$$\|f\|^2_{L^2(\Delta)} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1}.$$

4. Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ голоморфна в круге $\Delta = \{|z| < 1\}$ и диффеоморфно отображает Δ на область $D \subset \mathbb{C}$. Докажите формулу

$$\mathrm{Area}(D) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2.$$

Указание. Воспользуйтесь задачей 1 b) из Листка 1.

5. Пусть f — непрерывная (комплекснозначная) функция с компактным носителем на вещественной прямой. Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} f$ положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

Докажите, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon) = f(x)$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

6. Пусть f — непрерывная функция в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$. Докажите, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta = \pi i f(0),$$

где $\Gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \varepsilon, \arg z \in [0,\pi]\}$ — это верхняя полуокружность радиуса $\varepsilon > 0$, ориентированная “против часовой стрелки.”