ЛИСТОК 3

1. Пусть функция f голоморфна в проколотом круге $\Delta^* = \{0 < |z| < 1\}$.

a) Если $f \in L^2(\Delta^*)$, то f голоморфно продолжается в точку $z = 0$.

b) Верно ли утверждение (a), если $f \in L^p(\Delta^*)$ для некоторого $p \in [1, 2)$?

2. Пусть последовательность попарно различных точек $a_n \in D$ сходится к точке $a \in D$. Пусть функция $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a, a_1, a_2, \dots\})$ имеет полюс в каждой из точек a_n. Докажите, что для любого $B \in \mathbb{C}$ найдется такая последовательность $b_n \in D$, сходящаяся к точке $a \in D$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = B$. (Это утверждение называется “теоремой Сохоцкого для предельной точки полюсов.”)

3. Приведите пример голоморфной и ограниченной функции в $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, которая не продолжается голоморфно ни в одну точку отрезка $[-1, 1]$.
Указание. Функция Жуковского $Ж(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ взаимно-однозначно отображает проколотый единичный круг $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Докажите, что обратная функция голоморфна и удовлетворяет требуемым условиям.

4. Пусть D — область с гладкой границей и $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\overline{D})$. Докажите, что если функция f тождественно равна нулю на непустой дуге границы ∂D, то она тождественно равна нулю в D.

5. Может ли сумма степенного ряда голоморфно продолжаться

a) во все граничные точки его круга сходимости?

b) во все граничные точки этого круга кроме одной?

6. Докажите, что сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$ голоморфна в единичном круге и не продолжается голоморфно ни в одну точку единичной окружности.
Указание. Изучите поведение суммы этого ряда на полуинтервалах вида $[0, \zeta)$, где ζ — произвольный корень из единицы степени 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

7*. Докажите, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$ дает решение задачи 5 f) из Листка 1.