ЛИСТОК 4

1. Пусть функция f голоморфна в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и $f(x) = x^x$ при $x \in (0, +\infty)$. Вычислите значение $f(i)$.

2. Пусть функция f голоморфна в односвязной области U и не имеет нулей. Докажите, что существует такая голоморфная в U функция g, что $e^{g(z)} = f(z)$ при всех $z \in U$.

3. Пусть функция f голоморфна в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{ord}_a f = k \geq 1$. Докажите, что в окрестности точки a существует такая голоморфная функция g, что $f(z) = g(z)^k$.

4. Докажите, что не существует голоморфной в проколотом круге функции f, для которой $f(z)^2 = z$ при всех $z \in \Delta^*$.

5. Пусть росток $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_{z_0}$, $z_0 \neq 0$, неограниченно продолжается в области $\mathbb{C} \setminus 0$, причем для любого из этих продолжений выполнено $|f(z)| < 1$. Докажите, что $\mathbf{f}$ — росток постоянной функции.

6. Докажите, что для данных ростка $\mathbf{f}$ и точки $b \in \mathbb{C}$ существует не более чем счетное число различных ростков в $\mathcal{O}_b$, получающихся аналитическим продолжением ростка $\mathbf{f}$. (Теорема Пуанкаре–Вольтерра.)

7. Опишите аналитическое продолжение ростков, заданных формулами:

a) $\sqrt[n]{z}$, $n \geq 2$

b) $\sqrt{z^2}$ и $(\sqrt{z})^2$

c) $\sqrt{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}$, $n \geq 2$

d) $\ln \sin z$

e) $\sqrt{1 + \sqrt{z-1}}$

f) $\ln \ln z$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z}} - \sqrt{2}}$