ЛИСТОК 5

1. Пусть функция $f \in \mathcal{O}(U - \{a\})$ имеет в точке $a \in U$ полюс порядка $n \geq 1$ (т. е. $\operatorname{ord}_a f = -n$). Докажите формулу

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \Big((z-a)^n f(z) \Big)^{(n-1)},$$

где $g^{(k)}$ обозначает k-ую производную функции g.

2. Пусть функция f голоморфна в замкнутой верхней полуплоскости за исключением конечного множества точек. Если $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$, то

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\substack{|z|=R \\ 0 \leq \arg z \leq \pi}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0$$

для любого $\lambda > 0$. Верно ли это утверждение ("лемма Жордана") при $\lambda \leq 0$?

3. Вычислите интегралы

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx$

4. Пусть $f \in \mathcal{O}(\Delta^*)$ и логарифмическая производная $\dfrac{f'}{f}$ имеет в нуле полюс первого порядка. Докажите, что f имеет в нуле либо нуль, либо полюс.

5. Докажите основную теорему алгебры: каждый комплексный многочлен степени n имеет ровно n нулей в $\mathbb{C}$ с учетом кратности.

6. Пусть $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Докажите, что

a) $\max\limits_{|z| \leq 1} |P(z)| \geq 1$

b) равенство достигается тогда и только тогда, когда $P(z) \equiv z^n$.

7. Пусть функция f голоморфна в ограниченной области U и непрерывна в замыкании этой области. Если $|f(z)| \equiv 1$ при $z \in \partial U$, то функция f либо имеет нуль в U, либо постоянна в U.

8. Пусть функции $f_1, \ldots, f_n$ голоморфны в ограниченной области U и непрерывны в замыкании этой области. Докажите, что функция $|f_1| + \cdots + |f_n|$ достигает максимума на ∂U.