ЛИСТОК 6

1. Отобразите единичный круг биголоморфно на следующие области:

a) верхнюю полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$

b) плоскость с разрезом $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$

c) первый квадрант $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$

d) полосу $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$

2. Пусть $\kappa(z) = \dfrac{-z}{(1-z)^2}$ (функция Кёбе).

a) Докажите, что κ однолистно отображает единичный круг на $\mathbb{C} \setminus [\,\frac{1}{4}, +\infty)$.

b) Найдите разложение κ в ряд Тейлора в точке нуль.

3. Пусть $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ — однолистная функция в единичном круге. Докажите, что

$$\pi |f'(0)|^2 \leq \operatorname{Area}(f(\Delta)),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда f линейна.

4. Пусть f — автоморфизм единичного круга Δ. Докажите, что

a) если $f(0) = 0$, то $f(z) = e^{i\theta} z$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$;

b) в общем случае $f(z) = e^{i\theta} \dfrac{z - a}{1 - \overline{a} z}$ для некоторых $a \in \Delta$ и $\theta \in \mathbb{R}$.

5. Докажите, что всякий автоморфизм верхней полуплоскости имеет вид

$$z \longmapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ и $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$.

6. Докажите, что всякий автоморфизм $\mathbb{C}$ является аффинным преобразованием

$$z \longmapsto az + b, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

7. Найдите все автоморфизмы $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.