ЛИСТОК 8

1. Пусть f — голоморфное отображение верхней полуплоскости $H = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ в себя. Докажите, что $|f'(z)| \le \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}$ для любого $z \in H$.

2. Пусть f — голоморфное отображение единичного круга Δ в себя. Докажите, что если уравнение $f(z) = z$ имеет два различных решения в Δ, то $f(z) \equiv z$.

3. Пусть $D \subsetneq \mathbb{C}$ — односвязная область и $z_0 \in D$. Докажите, что $\sup |f'(z_0)|$ по *всем* голоморфным в D функциям, ограниченным по модулю единицей, достигается на биголоморфном отображении области D на единичный круг, переводящем точку z_0 в нуль.

4. (Теорема Картана.) Пусть D — ограниченная область, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(D) \subseteq D$ и $f(z_0) = z_0$ для некоторой точки $z_0 \in D$.

a) Докажите, что $|f'(z_0)| \le 1$.

b) Докажите, что если $f'(z_0) = 1$, то $f(z) \equiv z$.

Указание. Рассмотрите итерации этого отображения $f, f \circ f, f \circ f \circ f, \dots$

5. Пусть $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ — целые функции без нулей, линейно независимые над $\mathbb{C}$. Докажите, что всякая нетривиальная линейная комбинация $af + bg$, $a, b \in \mathbb{C}^*$, имеет нули.

6. Пусть $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ — целые функции. Докажите, что если $f^n + g^n \equiv 1$ при некотором $n \ge 3$, то эти функции постоянны.

7. Пусть функция f мероморфна в проколотом круге Δ^* и нуль является предельной точкой полюсов функции f.

a) Докажите, что f принимает в Δ^* все (конечные) значения за исключением, быть может, двух.

b) Приведите пример, в котором f не принимает ровно два значения.

8. Пусть $P(z)$ — полином, отличный от константы. Докажите, что функция $P(z)e^z$ принимает все значения в $\mathbb{C}$.