НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 23.05.2011.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо не позднее, чем 17:00 6 июня, положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вахте внизу в конверте с моим именем.

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее половины задач, то есть 5 задач. Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Пусть K и H являются гауссовой и средней кривизной поверхности соответственно (напомним, что мы придерживаемся определения, при котором H есть *сумма* главных кривизн, а не *полусумма*). Докажите, что $H^2 \geqslant 4K$ *(5 баллов).*

Задача 2. Поверхность называется *линейчатой,* если она параметрически задается в виде $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$. Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна *(5 баллов).*

Задача 3. Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости *(10 баллов).*

Задача 4. Рассмотрим плоскость Лобачевского, например как верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ с метрикой $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Докажите, что секционная кривизна всюду равна -1 *(5 баллов).*

Задача 5. Пусть $[z_0 : \dots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что *отображение Веронезе* степени d — это отображение $\nu_d : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \ldots : z_n]) = [\ldots : z^I : \ldots], \qquad (1)$$

где z^I это некоторый моном степени d от $z_0, \ldots, z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени d. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0 z_1 : z_0 z_2 : z_1 z_2].$$

Найдите обратный образ $\nu_d^* \gamma^1$ универсального расслоения при этом отображении. *(10 баллов).*

Задача 6. Пусть на матричной группе Ли G имеется метрика Картана-Киллинга. Найти геодезические её связности Леви-Чивита, проходящие через единицу группы и экспоненциальное отображение в единице группы *(10 баллов).*

Задача 7. Доказать, что поля Якоби инвариантны при аффинной замене параметра $\tilde{t} = at + b$, как и геодезические *(5 баллов).*

Задача 8. Найдите $\mathrm{ch}(\xi_k)$, где ξ_k есть тривиальное расслоение ранга k *(5 баллов).*

Задача 9*.** Найти число Понтрягина

$$\langle p_1(r\gamma^1_{\mathbb{H}}), [\mathbb{S}^4] \rangle = \oint_{\mathbb{S}^4} p_1(r\gamma^1_{\mathbb{H}}),$$

где $\gamma^1_{\mathbb{H}} = (E \longrightarrow \mathbb{H}P^1 \simeq S^4)$ — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а r операция овеществления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) *(25 баллов).*