НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 10.
Римановы многообразия-II. 11.04.2010.

Задача 1. Доказать, что любая винтовая поверхность, то есть поверхность вида $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, F(u) + av)$, локально изометрична поверхности вращения, причём винтовые линии переходят в параллели.

Задача 2. Пусть M_1 и M_2 римановы многообразия. На прямом произведении $M = M_1 \times M_2$ естественным образом вводится структура риманова многообразия, так как на касательном расслоении $TM = TM_1 \oplus TM_2$ естественно вводится евклидова метрика.

Пусть $p_i : M = M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$, $i = 1,2$, естественные проекции. Чтобы упростить дальнейшие формулы, введём обозначение $X_i = dp_i(X) \in \Gamma(TM_i)$, где $X \in \Gamma(TM)$ векторное поле на M. Пусть R тензор Римана риманова многообразия M, а R^i тензор Римана римановых многообразий M_i, $i = 1,2$.

Доказать, что

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R^1(X_1,Y_1)Z_1,W_1\rangle + \langle R^2(X_2,Y_2)Z_2,W_2\rangle.$$

Пусть $\sigma \subset T_pM$, $p \in M$, такая 2-плоскость, что $\dim dp_i(\sigma) = 1$, $i = 1,2$, то есть плоскость σ «натянута на вектор, касательный к M_1, и на вектор, касательный к M_2». Доказать, что тогда секционная кривизна в точке p в направлении σ равна нулю, $K_\sigma = 0$.

Задача 3. Рассмотрим плоскость Лобачевского L, например как верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ с метрикой $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Доказать, что секционная кривизна K_{T_pL} в любой точке $p \in L$ равна -1.

Задача 4. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество

$$R = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Задача 5. Доказать, что для n-мерной сферы $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}(< Y,Z > X - < X,Z > Y).$$

Задача 6. Доказать, что в предыдущей задаче секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \dfrac{1}{r^2}$.

Задача 7. Найти скалярную кривизну прямого произведения двух сфер $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_1}$ с естественной структурой риманова многообразия.

Задача 8. Доказать, что левоинвариантная метрика на $\mathrm{O}(n)$ порождённая скалярным произведением

$$\langle \xi,\eta\rangle_e = \operatorname{tr}\xi\eta^T \tag{1}$$

$\mathfrak{so}(n)$, является биинвариантной.

Задача 9. Построить биинвариантную метрику на группе Ли $\mathrm{U}(n)$.

Задача 10. Доказать, что в любой точке p группы Ли G с биинвариантной метрикой секционная кривизна в направлении любой 2-плоскости в T_pG неотрицательна.