

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 11.
Геодезические. 18.04.2011.

Задача 1. Построить пример такого риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_A M \rightarrow M$ не является

- сюръективным,
- инъективным.

Заметим, что если M не связно, то экспоненциальное отображение очевидно не сюръективно. Поэтому в первом пункте интересно придумать пример со связным многообразием M .

Задача 2. Докажите, что в геодезических координатах, центрированных в точке p , символы Кристоффеля в точке p обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Докажите, что центрированные в точке p координаты x^1, \dots, x^n , определённые в окрестности U , являются геодезическими координатами, центрированными в точке p , тогда и только тогда, когда $\Gamma_{jk}^i x^j x^k \equiv 0$ тождественно по x^1, \dots, x^n в U . *Указание.* Обратите внимание на то, что в геодезических координатах, центрированных в точке p , геодезические, проходящие через точку p , имеют вид $x^i = a^i t$.

Задача 3. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского как непараметризованные кривые. Можно взять любую из моделей плоскости Лобачевского, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. *Указание.* Найдите два интеграла исходной системы из двух дифференциальных уравнений второго порядка и используйте их для понижения порядка. Вы получите два уравнения, дающие $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$. Выпишите тогда уравнение для $\frac{dy}{dx}$ и решите его.

Задача 4. Докажите, что в полугеодезических координатах x^1, \dots, x^n , то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \text{const}, \dots, x^{n-1} = \text{const}$ являются геодезическими с параметром $t = x^n$.

Задача 5. Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_p M \mid |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу. Как при помощи этого наблюдения ввести полугеодезические координаты в окрестности точки p ?

Задача 6. Докажите, что геодезические в \mathbb{R}^n (с евклидовой метрикой) не имеют сопряжённых точек.

Задача 7. Докажите, что северный и южный полюс сферы \mathbb{S}^n являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n-1$.

Задача 8. Найдите явно якобиевы поля вдоль геодезических на сфере \mathbb{S}^n в подходящем базисе векторных полей.

Задача 9. Докажите, что северный и южный полюс сферы \mathbb{S}^n являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n-1$.

Задача 10. Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек.