НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 2.
Кривые в n-мерном евклидовом пространстве.
Поверхности в трёхмерном и n-мерном евклидовом пространстве. Ковариантная производная касательных и нормальных векторов. 14.02.2011.

Задача 1. Рассмотрим кривую в $\mathbb{E}^n$, параметризованную произвольным параметром t. Пусть $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ обозначает ориентированный объём k-параллелепипеда, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Пусть

$$V_i = \left(\frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^i x}{dt^i}\right).$$

Доказать, что кривизну и высшие кручения можно найти по формулам

$$k = \frac{V_2}{V_1^3}, \quad \varkappa_i = \frac{V_{i+2} V_i}{V_{i+1}^2 V_1}.$$

Задача 2. Написать параметрическое уравнение тора вращения и найти индуцированную метрику.

Задача 3. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для сферы произвольного радиуса.

Задача 4. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для поверхности вращения

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u)\cos\varphi, \rho(u)\sin\varphi).$$

Задача 5. Доказать, что поверхность с нулевыми гауссовой и средней кривизнами есть плоскость.

Задача 6. Доказать, что единственными поверхностями вращения имеющими нулевую среднюю кривизну являются плоскость и катеноид, получаемый вращением кривой $\left(\frac{\operatorname{ch}(at+b)}{a}, t\right)$.

Задача 7. Доказать, что средняя кривизна есть интегральное среднее всех нормальных кривизн

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(\varphi)\, d\varphi,$$

где $k(\varphi)$ — нормальная кривизна в направлении φ, отсчитываемом от одного из главных направлений.

Задача 8. Доказать, что коммутатор двух касательных к k-поверхности в $\mathbb{R}^n$ векторных полей снова будет касательным векторным полем.

Задача 9. Найти оператор Вейнгартена и ковариантные производные для сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Задача 10. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ и точку $A \in M$. Выберем нормаль $\mathbf{m}$ в точке A. Запишем $B(X,Y)$ в виде $B(X,Y) = \hat{B}(X,Y)\mathbf{m}$, где $\hat{B}$ некоторая обычная (вещественнозначная) квадратичная форма на касательной плоскости. Доказать, что $\hat{B}(X,Y) = \mathbf{II}(X,Y)$, то есть это вторая квадратичная форма поверхности.