НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 3. Поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. 21.02.2011.

Задача 1. Рассмотрим двумерную поверхность в $\mathbb{E}^3$. В качестве базиса нормального пространства выберем единичный нормальный вектор $\eta_1 = \mathbf{m}$. Доказать, что $W_{\eta_1} = \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{II}$. Вывести отсюда, что определения главных кривизн для поверхностей в трёхмерном (через первую и вторую квадратичную форму) и n-мерном пространстве (через оператор Вейнгартена) совпадают.

Задача 2. Рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{E}^n$. В качестве базиса нормального пространства будем брать единичный нормальный вектор $\eta_1 = \mathbf{m}$. Найти связность в нормальном расслоении.

Задача 3. Докажите формулу

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2}(\partial_X \langle Y, Z \rangle + \partial_Y \langle Z, X \rangle - \partial_Z \langle X, Y \rangle +$$

$$+ \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle),$$

не используя координат векторных полей и символов Кристоффеля.

Задача 4. Найти в частном случае $k = 2$, $n = 3$ деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена, если выбрать базис в касательных векторных полях $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ и базис $\mathbf{m}$ в нормальных векторных полях.

Задача 5. Написать уравнение Гаусса $d\Gamma^i_j + \Gamma^i_l \wedge \Gamma^l_j = b^\nu_m g_{\mu\nu} g^{mi} \wedge b^\mu_j$ в терминах Γ^l_{ij} и b^μ_{ij}. Написать его в частном случае двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$.

Задача 6. Вывести соотношение между db, b, Γ и K (уравнение Петерсона-Кодацци) по аналогии с уравнением Гаусса $d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = b_\mu \wedge b^\mu$, связывающим $d\Gamma$, Γ и b. Доказать, что в случае гиперповерхности если взять единичное поле нормалей в качестве базиса в нормальных векторных полях, то уравнение Петерсона-Кодацци не содержит K. Записать уравнение Петерсона-Кодацци в терминах Γ^l_{ij}, b^μ_{ij}, $K_{i,\nu}^{\ \ \mu}$ в частном случае двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$.

Задача 7. Выписать формулу преобразования символов Кристоффеля $\tilde{\Gamma} = T^{-1} \cdot \Gamma \cdot T + T^{-1} \cdot dT$ в терминах Γ^l_{ij} и $\tilde{\Gamma}^l_{ij}$.

Задача 8. Рассмотрим кривую в $\mathbb{E}^n$. Легко видеть, что любое базисное касательное векторное поле e_1 можно рассматривать как вектор скорости для некоторой параметризации. Пусть t такой параметр. Доказать, что кривизна кривой может быть найдена по формуле

$$k = \sqrt{\left(\frac{b^1_{11}}{g_{11}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{b^{n-1}_{11}}{g_{11}}\right)^2}.$$

Задача 9. В условиях предыдущей задачи доказать, что $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln g_{11}$.

Задача 10*. Доказать первое структрурное уравнение Картана

$$d e^\alpha = e^\beta \wedge \Gamma^\alpha_\beta,$$

где e^α — базис, дуальный к выбранному базису e_α пространства касательных векторных полей.