НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 4.
Параллельный перенос и геодезические. 1.03.2010.

Задача 1. Доказать, что если две поверхности касаются вдоль кривой, то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ касаются по кривой, которая геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Задача 2. Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Как он зависит от кривой? *Указание: в задачах 2, 3 и 4 выберите разумный базис в векторных полях.*

Задача 3. На какой угол поверн?тся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели $\psi = \psi_0$ на угол α?

Задача 4. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

Задача 5. Доказать, что если прямая лежит на поверхности, то она будет геодезической на этой поверхности.

Доказать, что геодезическими на k-плоскости $\mathbb{E}^k$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ являются в точности прямые.

Задача 6. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, прич?м касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают, то эта кривая является прямой.

Задача 7. Найти геодезические на сфере, цилиндре, круговом конусе (все три поверхности в $\mathbb{E}^3$).

Задача 8. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между r и α, где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 9. Найти на круговом конусе самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите разв?ртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*

Задача 10*. Доказать, что геодезические в произвольной параметризации, лежащие на поверхности M и проходящие через заданные точки A и B, совпадают с экстремалями функционала длины

$$L[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt,$$

где $\gamma(t_0) = A$, $\gamma(t_1) = B$. Это утверждение обобщает свойство прямой быть кратчайшей, соединяющей две заданных точки.