Письменный экзамен по курсу “Аномальная диффузия” (2011 г.)

Условия задач рассылаются по почте. Решения принимаются только в электронном виде (предпочтительно одним PDF файлом, можно отсканированное решение), не позднее 2-го мая 2011 года, по адресу: denis.grebenkov@polytechnique.edu. Всем приславшим решения будет послано подтверждение. “Домашний” экзамен подразумевает индивидуальные (самостоятельные) решения задач. При этом допускается использование литературы. При оценке будет учитываться как правильность ответа, так и ход решения. Комментарии слушателей к задачам приветствуются. Результаты будут отправлены в учебную часть НМУ. Не забудьте указать Ваши ФИО, курс и основное место учебы.

Задача 1. Десять мух равномерно расположены в пространстве между двумя липким стенами на расстоянии 5 метров. Когда муха садится на стену, она прилипает и больше не может летать. Предполагая движение мух диффузионным (с коэффициентов диффузии D = 0.01 $м^2/с$), вычислите среднее количество мух как функцию времени и оцените время, за которое останется (в среднем) одна летающая муха.

Задача 2. Рассмотрим обычное броуновское движение с коэффициентом диффузии D, стартовавшее из 0. Рассчитайте среднее время выхода τ из сферы радиуса R. Сравните это время с временем T, за которое броуновское движение в среднем удаляется от точки старта на расстояние R. Прокомментруйте результаты.

Задача 3. Докажите соотношение про двойное преобразование Лапласа:

$$L^2[g(|t_1-t_2|)](s_1,s_2) = (L[g](s_1) + L[g](s_2))/(s_1+s_2)$$

Задача 4. Помимо дробной производной Римана-Лиувилля ${}_0D_t^{1-\alpha}$, которая рассматривалась на лекция, иногда используется дробная производная Капуто, которая определяется как ${}_0d_t^{1-\alpha}\, g(t) = 1/\Gamma(\alpha) \int_0^t dt'\ (t-t')^{\alpha-1}\ dg(t')/dt'$. Сравните действия этих двух операторов, применяя их к простым тестовым функциям: t^β, exp(-t), др.

Задача 5. Для обобщенного уравнения Ланжевена с запаздывающим коэффициентом трения $\gamma(t)$, выведите общую формулу для автокорреляционной функции скорости $\langle X'(t_1)\, X'(t_2)\rangle$.

a. Упростите полученную формулу для случая, когда нет запаздывания ($\gamma(t)= \gamma\delta(t)$), отсутствует внешняя сила и начальные координата и скорость равны 0. Докажите, что такая система приходит в состояние равновесия с окружающим тепловым резервуаром при больших временах. Определите характерное время выхода к равновесию. Что получается в пределе, когда масса стремится к нулю?

b. Упростите исходную формулу для запаздывающиего коэффициента трения в форме степенного закона ($\gamma(t)=\gamma_\alpha t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$, $0<\alpha<1$), и отсутствует внешняя сила и начальные координата и скорость равны 0. В чем основные отличия в поведении автокорреляционной функции по сравнению с предыдущим случаем?

Примечание: Преобразование Лапласа от функции Миттаг-Леффлера:

$$L[\ t^{\beta-1}\, E_{\alpha,\beta}(-ct^\alpha)] = s^{-\beta}\, (1 + c\, s^{-\alpha})$$