Задачи к экзамену
по курсу «Гладкие динамические системы»

1. Рассмотрим отображение f полнотория $M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1, |w| \le 1\}$ в себя, определяемое формулой
$$f(z, w) = \left(z^2, \alpha w + \frac{z}{2}\right),$$
где $\alpha \in (0, 1/10)$ — параметр.[1] Рассмотрим множество Λ точек $x \in M$, для которых определены $f^{-n}(x)$ при всех n. Это множество с отображением f на нём называется *соленоидом Смейла—Вильямса*. Докажите, что это множество является связным компактом.

2. Докажите, что Λ является гиперболическим инвариантным множеством для f.

3. Докажите, что неустойчивое многообразие любой точки из Λ лежит целиком в Λ.

4. Докажите, что сечения соленоида плоскостями $z = \mathrm{const}$ гомеоморфны канторовскому множеству.

5. Докажите, что соленоид не линейно связен.

6. Докажите, что соленоид является локально максимальным гиперболическим множеством.

7. Постройте какое-нибудь марковское кодирование для отображения f на соленоиде. Опишите получающуюся марковскую цепь и выясните, каким парам последовательностей отвечает одна и та же точка.

8. Приведите пример локально максимального гиперболического множества, такого что периодические орбиты не плотны в нём. (Указание: начните с символической модели такого множества.)

9. Пусть Λ и Λ' — гиперболические инвариантные множества для диффеоморфизмов f и f' соответственно, причём существует гомеоморфизм $h\colon \Lambda \to \Lambda'$, сопрягающий их: $h \circ f|_\Lambda = f'|_{\Lambda'} \circ h$. Докажите, что если Λ локально максимально для f, то и Λ' локально максимально для f'.

10. Завершите доказательство теоремы о гёльдеровости сопряжения: если Λ и Λ' — гиперболические множества для f и f', причём гомеоморфизм $h\colon \Lambda \to \Lambda'$ их сопрягает: $h \circ f|_\Lambda = f'|_{\Lambda'} \circ h$, то h — гёльдеров. (На лекции было показано, что требуемая оценка $\rho(h(x), h(y)) \le C\rho(x, y)^\alpha$ имеет место, если либо $x \in W^u(y)$, либо $x \in W^s(y)$.)

11. Пусть на локально максимальном гиперболическом множестве Λ отображения $f|_\Lambda$ это отображение *топологически перемешивает*, т. е. для любых непустых открытых множеств U, V в Λ (в индуцированной топологии) найдётся такое N, что $f^N(U) \cap V \ne \varnothing$ при всех $n > N$. Докажите, что тогда устойчивое (и неустойчивое) многообразие любой точки из Λ всюду плотно в Λ.

Экзамен является письменным и домашним. Сдача работ 12 мая в 17:30.
Желательно заранее выслать работу в электронном виде
на адрес `klimenko05@mail.ru`

[1] В решении задач разрешается уменьшать максимальное значение для α, если провести оценки при всех $\alpha \in (0, 1/10)$ не получается.