НМУ, Оператор Лапласа-Бельтрами.
Экзамен. 05.06.2011.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо *не позднее* *27 июня, положить в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) в учебной части НМУ или на кафедре высшей геометрии и топологии мехмата МГУ.*

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день. Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Пусть $e_1, \dots, e_n$ локальный ортонормированный базис в векторных полях в некоторой окрестности точки p многообразия M, а $c_1(t), \dots, c_n(t)$ — такие геодезические, что $c_i(0) = p$ и $c_i'(0) = e_i$. Доказать, что оператор Лапласа-Бельтрами можно найти по формуле $\Delta f(p) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} f(c_i(t))|_{t=0}$. *(5 баллов).*

Задача 2. Как мы знаем, у задачи Дирихле в области пространства есть монотонность спектра по области: если $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, то $\lambda_i(\Omega_1, D) \geqslant \lambda_i(\Omega, D)$.

Доказать, что у задачи Неймана в области пространства монотонности спектра по области нет (построить примеры как роста, так и убывания собственных чисел при переходе к подобласти) *(10 баллов).*

Задача 3. Используя полученные на лекциях неравенства между собственными числами (монотонность спектра по области у задачи Дирихле, вилка Дирихле-Неймана и т.д.), найти оценки сверху и снизу для пяти первых собственных чисел задачи Дирихле в области $ABCDEF$, где $A = (0, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (1, 2)$, $D = (1, 1)$, $E = (2, 1)$, $F = (2, 0)$, то есть у квадрата 2×2, у которого «откусили четвертинку» *(до 10 баллов в зависимости от оценок).*

Задача 4. Доказать, что круг однозначно восстанавливается по спектру задачи Дирихле среди всех евклидовых областей *(5 баллов).*

Задача 5. На лекциях было доказано, что круг минимизирует первое собственное значение задачи Дирихле $\lambda_1(\Omega, D)$ среди всех плоских областей той же площади. Доказать, что то же самое верно для дизъюнктного объединения двух кругов одинакового радиуса и $\lambda_2(\Omega, D)$ *(10 баллов).*

Задача 6. Доказать, что дизъюнктное объединение n кругов одинакового радиуса не может минимизировать $\lambda_n(\Omega, D)$ для всех n *(5 баллов).*

Задача 7. Доказать, что совпадают спектр квадрата с длиной стороны 1 и условиями Дирихле на трёх сторонах и условием Неймана на одной стороне и спектр прямоугольного треугольника с катетами длиной $\sqrt{2}$ и условиями Дирихле на гипотенузе и одном катете и условием Неймана на другом катете *(10 баллов).*

Задача 8. Построив изометричную иммерсию клиффордова тора в сферу с помощью собственных функций, соответствующих первому ненулевому собственному значению оператора Лапласа-Бельтрами Δ, доказать, что метрика g_{Cl} на клиффордовом торе является экстремальной для функционала $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$. Найти значение $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g_{Cl})$ *(10 баллов).*

Задача 9. Построив необходимые изометричные иммерсии клиффордова тора в сферу с помощью собственных функций Δ, доказать, что метрика g_{Cl} на клиффордовом торе является экстремальной для бесконечного количества функционалов $\Lambda_j(\mathbb{T}^2, g)$. Найти хотя бы три таких значения j *(10 баллов).*

Задача 10*. Будем называть равносторонним тором плоский тор, отвечающий паралелограмму периодов, составленного из двух равносторонних треугольников. Используя тот же подход, что и в задаче 8, доказать, что метрика g_{eq} на равностороннем торе является экстремальной для функционала $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$. Найти значение $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g_{eq})$, и доказать, что метрика на клиффордовом торе не является максимальной для функционала $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$ *(20 баллов).*