Экзамен по спецкурсу "Ренормализация и универсальность Фейгенбаума"

1. Пусть I — отрезок вещественной прямой, и пусть $f\colon I \to I$ — непрерывная функция с $\operatorname{Per} f = P$ (где $\operatorname{Per} f$ обозначает множество всевозможных минимальных периодов периодических точек). Постройте непрерывную функцию g некоторого вещественного отрезка в себя, для которой $\operatorname{Per} g = 2P \cup \{1\}$.

2. Рассмотрим квадратичное семейство $f_c\colon z \mapsto z^2 + c$. Докажите, что множество параметров $c \in M \subset \mathbb{C}$, для которых критическая точка 0 отображения f_c притягивается к притягивающей периодической орбите периода 2, представляет собой круг $\{ c \in \mathbb{C}\colon |c+1| < 1/4 \}$.

3. Докажите, что множество Жюлиа отображения f_{-2} представляет собой отрезок $[-2, 2]$ вещественной оси. Что происходит с остальными точками под действием итераций отображения?

4. Пусть $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ — рациональное степени $d \geqslant 2$. Докажите, что:
a) f полиномиально тогда и только тогда, когда $f^{-1}(\infty) = \infty$;
b) f имеет $\{0, \infty\}$ в качестве множества точек с конечной большой орбитой тогда и только тогда, когда $f(z) = a \cdot z^{\pm d}$, $a \neq 0$;
c) f имеет точки с конечными большими орбитами тогда и только тогда, когда f сопряжено полиному или отображению $z \mapsto 1/z^d$ при помощи некоторого автоморфизма $\hat{\mathbb{C}}$.

5. Пусть f — рациональное отображение степени $d \geqslant 2$. Докажите, что $J(f)$ — минимальное замкнутое вполне инвариантное множество, содержащее более двух элементов. А именно, если $X \in \hat{\mathbb{C}}$ замкнуто, $|X| > 2$ и $f^{-1}(X) = X$, то $J \subset X$.

6. Докажите, что при вещественном $c > 1/4$ множество Жюлиа J отображения f_c — канторово множество, не пересекающее вещественную ось. А именно, каждая орбита $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \ldots$, лежащая в множестве J, однозначно определяется последовательностью знаков $\varepsilon_n = sgn(Im(z_n))$ следующим образом:

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_0 g(\varepsilon_1 g(\ldots \varepsilon_{n-1} g(\varepsilon_n \tilde{z}) \ldots)),$$

где $g(z) = \sqrt{z-c}$ — ветвь f^{-1}, отображающая плоскость с разрезом $U = \mathbb{C} \setminus [c, +\infty)$ в верхнюю полуплоскость, а $\tilde{z}$ — некоторая выделенная точка множества J в верхней полуплоскости.

7. Пусть f — многочлен степени $d > 1$ со старшим коэффициентом 1 и связным заполненным множеством Жюлиа K. Кроме того, пусть

$$\phi\colon \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta} \to \mathbb{C} \setminus K$$

— конформное отображение, нормализованное соотношением $\phi(z)/z \to \lambda > 0$ при $z \to \infty$, которое сопрягает f с отображением $z \to z^d$, а

$$R_t = \{ \phi(r \exp(2\pi i t))\colon 1 < r < \infty \}$$

— его внешние лучи.
Предположим, внешний луч R_t заканчивается в точке z. Докажите, что:
a) луч R_{td} заканчивается в точке $f(z)$;
b) каждый из d лучей вида $R_{(t+j)/d}$ заканчивается в одной из точек $f^{-1}(z)$;
c) каждая из точек множества $f^{-1}(z)$ является концевой для хотя бы одного такого луча.

Указания.
1. Рассмотрите отрезок длины втрое большей, чем I, и постройте функцию g отдельно на каждой из его третей.
5. Вспомните доказательство теоремы о растяжении множества Жюлиа (лекция 5).
6. Используйте тот факт, что функция g, ограниченная на компактное подмножество $J \subset U$, строго сжимает в метрике Пуанкаре ρ_U.
7. Не всякий луч обязан заканчиваться! Рассмотрите сперва более простой случай, когда точка z не является критической.

Срок сдачи экзамена: 30 апреля 2011 г.
Решения можно оставить в учебной части или прислать по адресу mitya160@yandex.ru