Бифуркация удвоения периода.

системы с непрерывным и дискретным временем — отображение Пуанкаре — бифуркации — семейства и их деформации — структурная устойчивость — гиперболичность — теорема Гробмана-Хартмана — бифуркация Андронова-Хопфа — бифуркация удвоения периода

Часть 1. Введение.

Первая лекция посвящена динамическим системам как с непрерывным, так и с дискретным временем; в дальнейшем нас будет интересовать лишь дискретный случай. Основными способами перехода от непрерывного времени к дискретному являются рассмотрение преобразования фазового пространства за какое-либо фиксированное время (скажем, 1), и *отображения Пуанкаре*, о котором речь пойдет ниже. Фазовым пространством динамической системы чаще всего является гладкое многообразие с римановой метрикой, или множество, которое может быть в него гладко вложено.

Основными рассматриваемыми объектами курса являются семейства одномерных вещественных или комплексных систем с дискретным временем. Это один из немногих случаев, когда удается проследить переход от регулярного движения к хаотическому и доказать, что с течением времени большая часть точек системы приходит к одному из вариантов конечного набора хорошо изученных режимов.

При рассмотрении некоторого класса динамических систем первоочередной задачей является изучение случаев общего положения, потому любую систему можно превратить в такую что сколь угодно малым изменением параметров системы, от которой она зависит. Однако если необходимо рассматривать семейства систем, зависящих от параметра, часто бывает невозможно добиться того, чтобы *все* системы из семейства были общего положения.

Подобными вопросами занимается теория бифуркаций. Слово *бифуркация* ("раздвоение") означает качественное изменение свойств системы при непрерывном изменении параметра (такое, как исчезновение неподвижной точки, рождение изолированной замкнутой траектории — предельного цикла, — и т.п.) Системы, в окрестности которых не происходит бифуркаций, называются *структурно устойчивыми.* В маломерной динамике (т.е. в случае, когда размерность фазового пространства меньше 3) бифуркациям соответствуют пересечения семейством множества систем не общего положения. Однако в многомерном случае существуют системы, в окрестности которых нет ни одной структурно устойчивой системы, поэтому в этом случае невозможно дать полное описание бифуркаций, которые происходят на границе множества структурно устойчивых систем.

Часть 2. Структурно устойчивые системы.

Вначале дадим общее понятие структурной устойчивости, а затем сделаем необходимые пояснения и приведем основные результаты.

Определение 2.1. Динамическая система называется *C^r-структурно устойчивой*, если при всяком достаточно C^r-малом ее изменении полученная система эквивалентна исходной.

Определение 2.2. C^r-топология на пространстве C^r-гладких функций задается сходимостью всех производных степени не выше r (равномерно на всем рассматриваемом множестве). C^r-топология в пространстве C^r-гладких векторных полей задается покомпонентно.

Определение 2.3. Два C^r-отображения $f\colon M \to M$ и $g\colon N \to N$ называются *C^m-эквивалентными*, или *C^m-сопряженными* ($m \leqslant r$), если существует такой C^m-диффеоморфизм $h\colon M \to N$, что $f = h^{-1} \circ g \circ h$. C^r-эквивалентность в пространстве потоков и векторных полей задается аналогично.

Таким образом, сопрягающее отображение h переводит друг в друга орбиты соответствующих точек с сохранением скорости движения по орбитами. Для векторных полей структурная устойчивость понимается в смысле *орбитальной эквивалентности*, то есть, от h требуется, чтобы он переводил друг в друга лишь сами орбиты (фазовые кривые) двух полей, сохраняя при этом их ориентацию. Если не вносить этого изменения, то структурная устойчивость векторных полей оказалась бы крайне редким явлением: так, любое малое изменение времени прохождения предельного цикла приводило бы к системе, неэквивалентной исходной.

Определение 2.4. Неподвижная точка диффеоморфизма называется *гиперболической*, если у нее нет мультипликаторов на единичной окружности. Особая точка векторного поля называется *гиперболической*, если у нее нет собственных значений на мнимой оси. Периодическая орбита векторного поля называется *гиперболической* если соответствующая неподвижная точка его преобразования монодромии гиперболическая.

Теорема 2.5 (теорема Гробмана–Хартмана)**.** *C^1-гладкое векторное поле (C^1-гладкий диффеоморфизм) в окрестности гиперболической особой (соотв., неподвижной) точки топологически эквивалентно своей линейной части в этой точки.*

Пример 2.6. Топологическая классификация гиперболических особых точек векторных на плоскости: сток, седло, источник. Центр и седлоузел не являются гиперболическими особыми точками. Каков топологический тип у (гиперболического) устойчивого фокуса?

Часть 3. Бифуркации векторных полей на плоскости.

Прежде чем переходить к интересующей нас бифуркации удвоения периода, изучим **бифуркацию Андронова–Хопфа**. Она связана с потерей устойчивости положения равновесия.

Рассмотрим однопараметрическое семейство векторных полей на плоскости, задающееся в комплексной координате формулой

$$\dot{z} = z(i\omega + \varepsilon + cz\bar{z}),$$

где ε — бифуркационный параметр. При всех ε точка $z = 0$ — положение равновесия типа фокус, который устойчив при $\varepsilon < 0$ и неустойчив при $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon = 0$ особая точка представляет собой центр по линейным членам, устойчивый при $c < 0$ и неустойчивый при $c > 0$.

Перейдем для удобства изучения потери устойчивости в координату $r = z\bar{z} = |z|^2$. В этой координате

$$\dot{r} = 2r(\varepsilon + cr), \quad r > 0.$$

Мы видим, что точке $r = -\frac{\varepsilon}{c}$ соответствует предельный цикл (если это число больше нуля). Поэтому если $c < 0$, то в иссследуемом семействе при $\varepsilon = 0$ происходит т.н. *мягкая потеря устойчивости* (решения, близкие к нулю, удаляются от него на расстояние порядка $\sqrt{\varepsilon}$), а при $c > 0$ — *жесткая потеря устойчивости* (решения, близкие к нулю, переходят в другой режим, например, начинают "наматываться" на далекий предельный цикл).

Опишем теперь **бифуркацию удвоения периода**, связанную с потерей устойчивости периодической траектории.

Пусть имеется векторное поле в $\mathbb{R}^3$ и замкнутая периодическая траектория. Если мультипликаторы (собственные значения линеаризации преобразования монодромии f) по модулю отличны от 1, то по теореме Гробмана-Хартмана топологический тип фазовых кривых в окрестности этой траектории не меняется. Кроме того, если мультипикаторы отличны от 1, то сама кривая не исчезает, а лишь немного деформируется (по теореме о неявной функции, примененной к функции $f(x) - x$).

Если же в семействе появляется векторное поле с мультипликатором, равным -1, то от периодической траектории ответвляется дважды наматывающаяся на нее замкнутая фазовая кривая. Такая бифуркация, равно как и соответствующая бифуркация после рассмотрения отображения Пуанкаре и перехода к случаю дискретного времени, называется *бифуркацией удвоения периода.* Бесконечные последовательности таких бифуркаций будут основной темой курса.

Начало изучения самого важного модельного примера — в упражнениях.