Каскады бифуркаций, универсальность Фейгенбаума и теорема Шарковского.

КАСКАД БИФУРКАЦИЙ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА — СТОХАСТИЧНОСТЬ VS. РЕГУЛЯРНОСТЬ — ГИПОТЕЗА ПАЛИСА — УНИМОДАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ — ЯВЛЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ — ПОРЯДОК ШАРКОВСКОГО

В этой лекции мы объясним, в чем заключается свойство универсальности, сформулируем основные связанные с ней вопросы и опишем некоторые методы изучения свойств вещественных одномерных отображений на примере теоремы Шарковского.

Часть 1. Каскад бифуркаций удвоения периода.

Обыкновенно в теории бифуркаций рассматривается локальное поведение семейства в окрестности бифуркационного параметра. Свойство универсальности же связано с поведением системы в окрестности того значения параметра, который является предельной точкой множества бифуркационных значений параметра.

Рассмотрим семейство $f(x, a)$ непрерывных отображений отрезка I в себя, зависящее от вещественного параметра a. Пусть каждое отображение семейства имеет неподвижную точку $x_0 = x_0(a)$. Устойчивость этой неподвижной точки определяется производной отображения в этой точке: если $|f'_x(x_0(a))| < 1$, то точка устойчива, а если $|f'_x(x_0(a))| > 1$, то нет (случай $|f'_x(x_0(a))| = 1$ означает, что если притяжение или отталкивание есть, то оно субэкспоненциально)

Предположим, что неподвижная точка x_0 устойчива при некотором значении параметра a, и производная в ней убывает с ростом a. Тогда (если при этом бассейн притяжения неподвижной точки не вырождался) при том значении параметра a_1, когда $f'_x(x_0(a)) = -1$, происходит бифуркация удвоения периода: неподвижная точка теряет свою устойчивость, и вблизи нее рождается притягивающая орбита x_1, x_2 периода 2.

Пример 1.1. Рассмотрим семейство $f_\lambda(x) := \lambda x(1-x)$, которое при $\lambda \in [0; 4]$ переводит отрезок в себя. При $\lambda > 1$ оно имеет неподвижную точку $x_0 = 1 - \frac{1}{\lambda}$, производная в которой равна $2 - \lambda$. Значит, первая бифуркация удвоения периода происходит при $\lambda = 3$.

Устойчивость этой периодической орбиты, в свою очередь, определяется производной $(f^2)'_x(x_1(a))$: если ее модуль меньше 1, то да, а если больше, то нет. Вначале, при постбифуркационном значении параметра, близком к a_1, $(f^2)'_x(x_1(a))$ близко к 1. Если орбита периода 2 устойчива и соответствующая производная уменьшается, при некотором значении параметра a_2 выполняется равенство $|(f^2)'_x(x_1(a))| = -1$, и происходит следующая бифуркация удвоения периода: периодическая орбита x_1, x_2 теряет свою устойчивость, и появляется орбита периода 4.

При дальнейшем увеличении параметра a происходят следующие бифуркации удвоения периода, порождающие периодические орбиты периодов 2^n, причем при каждом небифуркационном значении параметра орбита наибольшего периода будет устойчивой, а остальные — нет. Оказывается, в очень широком классе систем бифуркационные значения параметра a_n имеют предел: $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Отображение f_A имеет, таким образом, инвариантное канторово множество и бесконечное количество отталкивающих периодических орбит периодов 2^n. Значение параметра $a = A$ представляет собой точку перехода от регулярного движения к хаотическому (стохастическому).

Определение 1.2. Отображение отрезка в себя называется *регулярным*, если оно обладает притягивающей периодической орбитой. Отображение отрезка в себя называется *стохастическим*, если оно обладает инвариантной мерой, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега.

Теорема 1.3 (Любич, 1998). *Почти всякое отображение из квадратичного семейства f_a (пример 1.1) либо регулярно, либо стохастично.*

Теорема Любича и ее последующие обобщения для большого класса отображений, в частности, унимодальных (определение см. ниже), явились первым примером доказательства **гипотезы Палиса**, для случае одномерной динамики утверждающей, что *аттрактор почти каждой динамической системы состоит из конечного числа частей, каждая из которых либо представляет собой притягивающую периодическую орбиту, либо обладает абсолютно непрерывной вероятностной мерой.*

Часть 2. Универсальность Фейгенбаума.

В конце 1970-х годов М.Фейгенбаум вычислял на калькуляторе скорость сходимости бифуркационных значений параметра a_n к предельному значению A, то есть предел

$$\lim_{n\to\infty}(A-a_n)^{-\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

и он оказался приблизительно равным $4,6692\ldots$. Однако затем он обнаружил, что для других семейств унимодальных отображений, например, для $f_b(x) = b\sin\frac{x}{\pi}$ (в ограничении на отрезок [0;1] и при $b \in [0;1]$) экспоненциальная скорость сходимости бифуркационных значений к предельному точно такая же.

Определение 2.1. Гладкое отображение отрезка в себя называется *унимодальным*, если оно имееет единственную критическую точку (ноль производной).

Возникла естественная гипотеза, которая вскоре была доказана чисто вещественными методами (с использованием компьютера), а затем и комплексными.

Теорема 2.2 (Универсальность Фейгенбаума)**.** *[Feigenbaum, Collet, Tresser, Lanford, 1979-1982; Sullivan, McMullen, Lyubich, 1992-1999)] Экспоненциальная скорость сходимости бифуркационных значений к предельному одинакова для всех однопараметрических семейств унимодальных отображений отрезка в себя.*

Показатель скорости сходимости (1) для унимодальных отображений равен $\delta = 4,6692\ldots$ и называется *константой Фейгенбаума.*

Как мы увидим в дальнейшем, универсальность проявляется не только в указанном свойстве, но и в структуре и размерности аттрактора системы и в поведении итераций отображений в окрестности предела бифуркационных значений параметра (зависимость от которого, естественно, предполагается аналитической). Мы проследим первое доказательство этого факта в течение ближайших лекций, а во второй части курса опишем методы, позволяющие доказать теорему Любича и получить второе доказательство универсальности Фейгенбаума.

Часть 3. Порядок Шарковского.

Всюду ниже под периодом точки будет пониматься ее наименьший возможный период, а все точки в цикле под действием отображения будут подразумеваться различными.

Определение 3.1. Линейный порядок на множестве натуральных чисел, задаваемый соотношением

$$1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \cdots \prec 2^m \prec \cdots \prec 2^k{\cdot}(2n{-}1) \prec \cdots \prec 2^k{\cdot}5 \prec 2^k{\cdot}3 \prec \cdots \prec 2{\cdot}7 \prec 2{\cdot}5 \prec 2{\cdot}3 \prec \cdots \prec 7 \prec 5 \prec 3,$$

называется *порядком Шарковского.*

Пусть f — непрерывная функция на отрезке $I \supset \mathbb{R}$, отображающая его в себя.

Теорема 3.2 (Шарковский, 1964)**.** *Если f обладает точкой (наименьшего возможного) периода a и $b \prec a$, то f обладает точкой (наименьшего возможного) периода b.*

Более того, кроме теоремы Шарковского не существует никаких ограничений на появление периодических орбит.

Теорема 3.3. *Для каждого непустого начального отрезка M порядка Шарковского существует функция f, для которой совокупность периодов всех ее периодических точек совпадает с M.*

Доказательство обеих теорем содержится в упражнениях (материал для которых любезно предоставил А.Клименко); сейчас же мы продемонстрируем частный случай теоремы Шарковского, в доказательстве которого содержатся основные методы для получения общего результата.

Предложение 3.4. *Если функция f имеет цикл длины 3, то она имеет цикл любой другой длины.*

Исторически это утверждение получило название "период 3 влечёт хаос". Результат был опубликован в одноименной статье Ли и Йорка 1975 года, которые не знали об общем результате Шарковского.

Доказательству предложения предпошлем определение и лемму.
Через $D, D_1, D_2, \ldots$ будем обозначать отрезки, лежащие в I.

Определение 3.5. Пусть $D_1, \ldots, D_n$ — набор отрезков. Его *графом Маркова* называется ориентированный граф, вершины которого соответствуют отрезкам набора $D_1, \ldots, D_n$, а ребро $D_i \to D_j$ проведено, если и только если $f(D_i) \supset D_j$ (D_i *накрывает* D_j под действием f).

Лемма 3.6. *(i) Если $D \subset f(D)$, то f обладает неподвижной точкой.*
(ii) Если $D_1 \subset f(D)$, то существует отрезок $\tilde{D} \subset D$, такой что $f(\tilde{D}) = D_1$.
(iii) Пусть граф Маркова содержит стрелки $D_1 \to D_2 \to \cdots \to D_n \to D_1$. Тогда существуют отрезки $D'_1 \subset D_1, \ldots, D'_n \subset D_n$, такие что $f(D'_1) = D'_2$, $f(D'_2) = D'_3, \ldots, f(D'_{n-1}) = D'_n$, $f(D'_n) = D_1$.
(iv) Пусть граф Маркова содержит стрелки $D_1 \to D_2 \to \cdots \to D_n \to D_1$. Тогда существуют точки $x_j \in D_j$ ($j = 1, \ldots, n$) такие, что $f(x_1) = x_2, \ldots, f(x_{n-1}) = x_n$, $f(x_n) = x_1$.

Доказательство. (i) $D = [a, b]$. Пусть $f(x) \leqslant a$, $f(y) \geqslant b$. Тогда $f(x) - x \leqslant a - a = 0$, $f(y) - y \geqslant b - b = 0$, поэтому существует $z \in [x, y]$, т. ч. $f(z) - z = 0$.

(ii) $D_1 = [a, b]$. Выберем $a', b' \subset D$ так что $f(a') = a$, $f(b') = b$. Будем считать, что $a' \leqslant b'$ (второй случай полностью аналогичен). Положим $\tilde{b} = \inf\{\, x \in [a', b'] \mid f(x) = b \,\}$. Тогда $f(\tilde{b}) = b$, а $f([a', \tilde{b})) \subset (-\infty, b)$. Наконец, положим $\tilde{a} = \sup\{\, x \in [a', \tilde{b}] \mid f(x) = a \,\}$. Тогда $\tilde{D} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$ — искомый.

(iii) По индукции из пункта (ii).

(iv) Применим пункт (i) к отображению f^n и отрезку D'_1 из пункта (iii) (последнее гарантирует, что точки периодической орбиты принадлежат соответствующим отрезкам). □

Доказательство предложения 3.4. Если f имеет цикл длины 3, то существуют такие отрезки D_1 и D_2, имеющие одну общую точку, что их граф Маркова содержит стрелки $D_1 \to D_1$, $D_1 \to D_2$, $D_2 \to D_1$. Действительно, циклически меняя нумерацию точек цикла, добьёмся того, что точка x_2 лежит между x_1 и x_3. Тогда $D_1 = [x_2, x_3]$, $D_2 = [x_1, x_2]$.

Цикл длины $l = 1$ существует благодаря свойству $D_1 \to D_1$ и пункту (i) леммы.
Пусть $l > 1$. Составим замкнутый путь $D_1 \to D_2 \to D_1 \to \cdots \to D_1 \to D_1$ длины l в графе Маркова, в котором по пункту (iv) леммы есть замкнутая орбита. Чтобы показать, что она представляет собой цикл длины l, рассмотрим два случая: либо она проходит по внутренностям отрезков, либо она является несколько раз повторённым циклом x_1, x_2, x_3. В первом случае заметим, что орбита только один раз пройдёт через D_2, и потому является искомым циклом. Второй случай невозможен при $l \neq 3$: $l/3 > 1$ точек такого цикла лежат вне D_1. □