Преобразование удвоения.

СВОЙСТВА УНИМОДАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА — ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УДВОЕНИЯ — СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УДВОЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕ К УНИВЕРСАЛЬНОСТИ

В этой лекции мы объясним явление универсальности, сформулированное на прошлой лекции.

Часть 1. Свойства унимодального семейства.

Рассмотрим однопараметрическое семейство $f_a(x)$ унимодальных гладких отображений отрезка $[-1,1]$ в себя. Будем предполагать, что единственная критическая точка $x_c(a)=0$ и является точкой максимума при всех a. Любое унимодальное семейство сопряжено с семейством такого вида, и периодические отталкивающие и притягивающие точки переходят друг в друга при сопряжении. Пусть при возрастании параметра a на конечном промежутке происходит бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода при значениях параметра a_n, и $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Теорема 1.1 (Универсальность Фейгенбаума)**.**

$$\lim_{n\to\infty}(A-a_n)^{1/n}=\delta, \tag{1}$$

где $\delta = 4,6692\ldots$ — константа, не зависящая от семейства f_a.

Напомним, при $a=a_n$ у отображения f_a появляется устойчивая периодическая траектория периода 2^n. Это означает, что в интервале $a_n<a<a_{n+1}$ у отображения $(f_a)^{2^n}$ имеется 2^n устойчивых неподвижных точек. Зафиксируем любую из них, скажем, $x=x(a)$. Тогда $d_n(a) := (f_a^{2^n})'_x(x(a))$ по модулю меньше 1 при $a\in[a_n,a_{n+1}]$, причем $d_n(a)\to 1$ при $a\to(a_n,+)$ и $d_n(a)\to -1$ при $a\to(a_{n+1},-)$. Значит, существует такое значение параметра $\overline{a_n}\in[a_n,a_{n+1}]$, что $d_n(a)(\overline{a_n})=0$.

Определение 1.2. Периодическая орбита периода n отображения $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *сверхустойчивой*, если $(f^n)'(x)=0$ для некоторой (равносильно: любой) точки x из орбиты.

Таким образом, значение параметра $\overline{a_n}$ соответствует наличию сверхустойчивой периодической орбиты периода 2^n. Произведем несложную переформулировку: равенство (1) равносильно равенству

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{a_{n+1}}-\overline{a_n}}{\overline{a_{n+2}}-\overline{a_{n+1}}}=\delta. \tag{2}$$

Сейчас нам будет удобнее следить за асимптотикой именно этого выражения.

Основное наблюдение, принадлежащее Фейгенбауму и объясняющее универсальность, состоит в том, что при $a\in[\overline{a_n},\overline{a_{n+1}}]$ графики отображений $(f_a)^{2^{n-1}}(x)$ и $(f_a)^{2^n}(x)$ асимптотически совпадают в некоторой окрестности критической точки при $n\to\infty$, с точностью до изменения масштаба и отражения относительно горизонтальной оси. Более того, после сдвига и переномировки параметра будут асимптотически совпадать целые семейства отображений, а именно, семейства

$$(f_a)^{2^{k-1}}(x),\quad \overline{a_k}<a<\overline{a_{k+1}},$$

при $k=n$ и при $k=n+1$.

Значит, последовательно удваивая итерации, производя перенормировку параметра и изменение масштаба (ренормализацию), мы получаем в пределе семейство отображений, инвариантное относительно произведенных действий. Идея доказательства заключается в том, что предельное семейство не зависит от начального, а определяется только проведенными преобразованиями. Кроме того, в этом случае и исходные отображения, после 2^n итераций и соответствующей перенормировки, стремятся к одному и тому же отображению (при $n\to\infty$).

Для строгого описания производимых на каждом шаге процедур необходимо ввести преобразование удвоения.

Часть 2. Преобразование удвоения.

Пусть $f(x)$ — четное унимодальное отображение отрезка $I = [-1, 1]$ в себя, с точкой максимума $x_c = 0$. Введем обозначения:

$$\alpha = \alpha(f) = -\frac{f(f(0))}{f(0)};$$

$$I_1 = [-\alpha, \alpha]; \quad I_2 = [f(\alpha), f(0)]; \quad I_3 = [f^2(0), f^2(\alpha)].$$

Предложение 2.1. *(i) $f(I_1) = I_2$, $f(I_2) = I_3$;*
(ii) Пусть, дополнительно,

$$f(0) > 0, \quad f^2(0) < 0, \quad f(\alpha) > \alpha, \quad f^2(\alpha) < \alpha.$$

Тогда $I_3 \subset I_1$ и $I_2 \cap I_1 = \emptyset$.

Предложение доказывается непосредственной проверкой.

Определение 2.2. Преобразование $f \to Tf$, где

(3) $$Tf(x) := -\alpha^{-1} f^2(\alpha x),$$

называется *преобразованием удвоения.*

Предложение 2.3. *Если f — унимодальное C^1-отображение с точкой максимума $x_c = 0$, $f(0) > 0$. Тогда $Tf(x)$ также имеет точку максимума $x = 0$, причем $Tf(0) = f(0)$. В условиях предыдущего предложения $Tf(x)$ унимодально.*

Доказательство. Равенство $Tf(0) = f(0)$ очевидно. Критические точки определяются равенством $Tf'(x) = -f'(f(\alpha x)) \cdot f'(\alpha x)$, откуда 0 — критическая, и $Tf'(x) > 0$ в левой полуокрестности нуля и $Tf'(x) < 0$ в правой. В условиях предыдущего предложения $f'(f(\alpha x)) \neq 0$ на отрезке I из свойства (ii), поэтому 0 — единственная критическая точка. □

Пусть U — пространство отображений $f \in C^2(I)$ (необязательно четных), таких что $x = 0$ — точка максимума и $f(0)$ фиксировано (скажем, $f(0) = b > 0$). Предложение показывает, что пространство U инвариантно относительно преобразования удвоения T. Пусть Σ_1 — гиперповерхность в пространстве U, состоящая из отображений, имеющих производную -1 в неподвижной точке. Докажем следующую редукцию:

Предложение 2.4. *Пусть выполнены следующие свойства преобразования удвоения:*

1. *T имеет неподвижную точку $g \in U$;*
2. *Линеаризованное отображение $DT(g)$ гиперболично и имеет только одно собственное значение δ, по модулю большее 1 (константа Фейгенбаума);*
3. *Отвечающая δ неустойчивая сепаратриса неподвижной точки g трансверсально пересекает гиперповерхность S_1.*

Тогда выполнена теорема 1.1.

Доказательство. По теореме Адамара—Перрона, через неподвижную точку g проходит одномерная неустойчивая сепаратриса $W^u(g)$, состоящая из отображений, удаляющихся от g под действием T, и устойчивая сепаратриса $W^s(g)$ коразмерности 1, состоящая из отображений, притягивающихся к g под действием T.

Пусть $S_{n+1} = T^{-1}(S_n)$, $\quad n \in \mathbb{N}$. Заметим, что при пересечении семейством отображений $f_a(x)$ поверхности S_k из устойчивой периодической траектории периода 2^{k-1} рождается неустойчивая периодическая траектория периода 2^k. Это означает, что в точках пересечения семейства f_a с гиперповерхностями S^k происходит бифуркация удвоения периода, и они соответствуют бифуркационным значениям a_k.

Неустойчивая сепаратриса $W^u(g)$ трансверсально пересекает S_1, а следовательно и все S_k. Поверхности S_k сходятся к $W^s(g)$, причем в окрестности произвольной точки $W^s(g)$ расстояния между S_k и $W^s(g)$ уменьшаются в число раз, стремящееся к δ. Поэтому, ввиду трансверсальности, бифуркационные значения любого семейства f_a, лежащего достаточно близко к $W^u(g)$, удовлетворяют соотношению $A - a_k \sim const \cdot \delta^{-k}$ (константа зависит от семейства и определяется производной $f_a(x)'_a$ при $a = A$). □

Отображение g является универсальным в том смысле, что $\lim_{k\to\infty} T^k f_A = g$.

Замечание 2.5. В других инвариантных пространствах, например, в пространствах отображений вида $f(|x|^\gamma)$, по всей видимости, есть свои неподвижные точки преобразования удвоения с указанными свойствами, с универсальными константами $\delta = \delta(\gamma)$ (отдельная константа для каждого пространства).

В начале 1980-х (Collet, Tresser, 1980; Lanford, 1982) требуемые свойства (1)-(3) из предыдущего предложения были доказаны с использованием компьютерных вычислений. Так, существование неподвижной точки для T можно обосновать следующим образом. Как и следует ожидать, искомая функция g оказывается четной. Попробем найти ее разложение в ряд Фурье. Если рассмотреть многочлен $\widetilde{g}$ степени $2m$, то следующий многочлен $\widetilde{g}_1$ той же степени можно получить путем отбрасывания старших степеней от многочлена $T(\widetilde{g})$ степени $4m^2$. Таким способом происходит уточнение разложения функции g в ряд до сколь угодно высокой степени. После получения функции, очень близкой к искомой, можно, линеаризовав задачу, показать строго с помощью метода Ньютона, что неподвижная точка существует.