Голоморфная динамика: обзор.

теорема Вейерштрасса — теорема Кёбе об искажениях — теорема Монтеля — множества Фату и Жюлиа и их свойства — теорема о транзитивности и ее следствия

Пусть дано гладкое отображение отрезка в себя. Очень продуктивным является подход, связанный с расширением области определения в комплексную плоскость. Тогда на основании результатов, полученных с использованием аппарата комплексного анализа, можно делать выводы относительно исходного отображения на вещественной оси. Итерациями голоморфных отображений занимается голоморфная динамика.

Часть 1. Необходимые факты из комплексного анализа.

Введем обозначения для всех последующих лекций: $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1 \}$ — единичный диск, и $\hat{\mathbb{C}}$ — сфера Римана.

Теорема 1.1 (теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости). *Равномерный предел f последовательности f_n голоморфных функций в области U — голоморфная функция. Более того, последовательность производных f_n' этих функций сходится к f' равномерно на компактах в U.*

Определение 1.2. *Унивалентное* отображение — инъективное голоморфное отображение.

Теорема 1.3 (теорема Кёбе об искажениях). *Пространство унивалентных отображений $f\colon \Delta \to \hat{\mathbb{C}}$ компактно с точностью до композиций с автоморфизмами $\hat{\mathbb{C}}$.*

Последнее означает, что для всякой последовательности унивалентных отображений можно выбрать такую ее подпоследовательность $f_n \colon \Delta \to \hat{\mathbb{C}}$ и такие мебиусовы (т.е. дробно-линейные) преобразования $M_n \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, что последовательность $M_n \circ f_n$ сходится к унивалентному отображению f равномерно на компактных подмножествах в Δ.

Эквивалентная (более классическая) формулировка выглядит следующим образом:

Теорема 1.4 (теорема Кёбе об искажениях, вариант 2). *Пространство унивалентных отображений $f\colon \Delta \to \mathbb{C}$, нормализованное условиями $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$, компактно в топологии равномерной сходимости на компактах.*
В частности, для $r < 1$ и $x, y \in \Delta(r) := \{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < r \}$ и некоторой функции $C(r)$, такой, что $C(r) \to 1$ при $r \to 0$, выполнено

$$\frac{1}{C(r)} \leqslant \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leqslant C(r), \quad \frac{1}{C(r)} \leqslant f'(x) \leqslant C(r).$$

Определение 1.5. Пусть X — комплексное многообразие. Семейство $\mathcal{F}$ голоморфных отображений $f\colon X \to \hat{\mathbb{C}}$ называется *нормальным*, если всякая последовательность $f_n \in \mathcal{F}$ имеет подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактных подмножествах в X.

По теореме Вейерштрасса, предел f_∞ — также голоморфная функция из X в $\hat{\mathbb{C}}$.

Теорема 1.6 (теорема Монтеля). *Для всякого комплексного многообразия пространство голоморфных отображений в $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{ 0, 1, \infty \}$ образует нормальное семейство.*

Следствие 1.7. *Пусть $s_i \colon X \to \hat{\mathbb{C}}$, $i = 1, 2, 3$ — три голоморфных отображения, графики которых не пересекаются. Тогда семейство $\mathcal{F}$ всех отображений $f\colon X \to \hat{\mathbb{C}}$, графики которых не пересекаются с графиками s_i, нормально.*

Доказательство. Рассмотрим голоморфно зависящие от $x \in X$ мебиусовы преобразования $A(x)$, отображающие $\{ s_i(x) \}$ в точки $\{ 0, 1, \infty \}$. Тогда любая последовательность $f_n \in \mathcal{F}$ задает последовательность $g_n(x) = A(x)(f_n(x))$ отображений, не принимающих значений в точках $\{ 0, 1, \infty \}$. Тогда прообраз сходящейся на компактах подпоследовательности g_{n_k} — искомый. □

Часть 2. Множества Фату и Жюлиа.

Определение 2.1. Пусть S — компактная риманова поверхность и $f\colon S \to S$ — непостоянное голоморфное отображение. *Множеством Фату* $F = F(f)$ называется область нормальности семейства итераций отображения f (то есть множество таких точек $p \in S$, что найдется окрестность $U = U(p)$, ограничение семейства f^n на которую нормально). *Множеством Жюлиа* $J = J(f)$ называется $S \setminus F$.

Как следует из определения, множество Фату открыто, а множество Жюлиа замкнуто. Как мы увидим, динамика отображения на множестве Фату, в некотором смысле, предсказуема, а на множестве Жюлиа — нет. Точка принадлежит множеству Жюлиа тогда и только тогда, когда в ее окрестности отображение демонстрирует чувствительную зависимость от изменения начальных данных. При этом само множество Жюлиа обычно имеет сложную структуру самоподобного фрактала (пример ниже этого, правда, не подтверждает).

Пример 2.2. Пусть $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^2$. Тогда $J = \{\, z\colon |z| = 1 \,\}$.

Лемма 2.3 (лемма об инвариантности). *Множества Фату и Жюлиа вполне инвариантны относительно отображения f, то есть $z \in F \iff f(z) \in F$ и $z \in J \iff f(z) \in J$.*

Доказательство. Два утверждения леммы эквивалентны друг другу. Утверждение про множество Фату следует из того, что для всякого открытого $U \subset S$ последовательность f^{n_j} равномерно сходится на компактах из U тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность итераций f^{n_j+1} сходится на компактах из $f^{-1}(U)$. $\square$

Следствие 2.4 (самоподобие множества Жюлиа). *Для любой некритической точки $z \in J$ существует (индуцированный) конформный автоморфизм некоторой окрестности точки z в окрестность точки $f(z)$, переводящий друг в друга пересечения множества Жюлиа с этими окрестностями.*

Лемма 2.5 (лемма об итерации). *Для любого $k > 0$ выполнено $F(f) = F(f^k)$ и $J(f) = J(f^k)$.*

Доказательство. Пусть $k = 2$. Если $z \in F(f^2)$, то для некоторой окрестности U точки z последовательность ограничения четных итераций f^{2n} на U содержится в компактном множестве $K \subset Hol(U, S)$. Значит, каждая итерация отображения f, ограниченная на U, принадлежит компактному множеству $K \cup f \circ K \subset Hol(U, S)$. Значит, $z \in F(f)$. Обратное включение очевидно. Случай $k > 2$ аналогичен (необходимо рассматривать объединение K и его композиций с первыми $k-1$ итерациями f). Утверждение про множество Жюлиа следует из доказанного. $\square$

Определение 2.6. Пусть λ — мультипликатор периодической орбиты. Тогда орбита называется:
притягивающей, если $|\lambda| < 1$;
нейтральной, если $|\lambda| = 1$;
отталкивающей, если $|\lambda| > 1$.
Притягивающая периодическая орбита называется *суперпритягивающей*, если $\lambda = 0$, и *геометрически притягивающей* иначе. Нейтральная периодическая орбита отображения называется *параболической*, если ее мультипликатор является корнем из единицы, но при этом $f^n \neq id$ ни для какого $n > 0$.

Определение 2.7. *Областью (бассейном) притяжения* притягивающей периодической орбиты периода m называется множество таких точек, которые стремятся к одной из точек орбиты при действии итераций отображения f^m.

По определению, область притяжения любой притягивающей периодической орбиты открыта.

Лемма 2.8. *Пусть S компактно. Тогда каждая притягивающая периодическая орбита содержится в F, а каждая отталкивающая — в J.*

Доказательство. Лемма об итерации сводит задачу к соответствующему утверждению про неподвижные точки. Пусть z_0 — неподвижная точка и $|\lambda| > 1$. Тогда первая производная f^n в точке z_0 равна λ^n. Значит, по теореме Вейерштрасса о равномерной сходимости никакая последовательность итераций не может сходиться равномерно в окрестности z_0. Если же $|\lambda| < 1$, то при $|\lambda| < c < 1$ из разложения в ряд Тейлора следует, что $|f(z) - f(z_0)| < c|z - z_0|$ при всех z, достаточно близких к z_0. $\square$

Следствие 2.9. *Бассейн притяжения любой притягивающей периодической орбиты также лежит в F.*

Случай нейтральной периодической точки намного сложнее. Однако можно получить следующий результат:

Лемма 2.10 (лемма о параболических орбитах)**.** *Пусть S компактно. Тогда каждая параболическая орбита содержится в J.*

Доказательство. Лемма об итерации сводит задачу к утверждению про неподвижную параболическую точку z_0 с мультипликатором 1.
Пусть w — локальный униформизующий параметр, такой, что его значение $w = 0$ соответствует z_0. Тогда $\tilde{f}(w) = w + a_q w^q + \ldots$, где $q \geqslant 2$, $a_q \neq 0$. Значит, $\tilde{f}^k(w) = w + k a_q w^q + \ldots$, и производная порядка q отображения $\tilde{f}^k$ равна $k \cdot (q! a_q)$. Утверждение теперь следует из теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости. □

Часть 3. Динамика на сфере Римана.

Хотя множества Фату и Жюлиа определены на любой римановой поверхности, наиболее интересным для нас является случай голоморфных отображений сферы Римана $\hat{\mathbb{C}}$ в себя, то есть рациональных функций. *Степенью* d рациональной функции $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, где p, q — многочлены, не имеющие общих множителей, называется максимальная из степеней p и q. Степень рационального отображения есть число решений уравнения $f(z) = c$ (с учетом кратностей).

Всюду ниже мы будем полагать $d \geqslant 2$ (то есть, что отображение не постоянно и не дробно-линейно).

Лемма 3.1. *Множество Жюлиа рационального отображения степени 2 и выше непусто.*

Доказательство. Если бы $J(f)$ было пусто, то семейство итераций отображения f было бы нормальным на всей сфере Римана. С помощью леммы Бореля-Лебега и диагонального метода, выберем последовательность f^{n_j}, которая сходится равномерно к голоморфному пределу $g\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Но, с одной стороны, степень f^{n_j} равна d^{n_j}, а с другой — равна степени отображения g при больших n_j, так как с того момента, как сферическое расстояние между f^{n_j} и g станет меньше расстояния между антиподальными точками, всякое отображение f^{n_j} можно прогомотопировать в g вдоль (единственной) геодезической на сфере, а у гомотопных отображений степени совпадают. □

Определение 3.2. *Большой орбитой* точки z относительно отображения $f\colon S \to S$ называется множество $go(z, f)$, состоящее из всех точек $z' \in S$, чьи орбиты пересекают орбиту точки z

Лемма 3.3 (лемма о конечных больших орбитах)**.** *Если f — рациональное отображение степени $d \geqslant 2$, то множество $\mathcal{E}(f)$ точек с конечными большими орбитами имеет не более двух элементов. Если такие точки существуют, то они суперпритягивающие.*

Доказательство. Поскольку f отображает $\hat{\mathbb{C}}$ на себя, то оно отображает большую орбиту на себя. Следовательно, большая орбита образует цикл. Значит, каждая точка орбиты является критической (поскольку имеет $d > 1$ прообразов с учетом кратности), откуда следует второе утверждение леммы. Первое утверждение леммы следует из теоремы Монтеля: если бы $\mathcal{E}(f)$ содержало три точки, то дополнение U к большим орбитам этих точек лежало бы в множестве Фату. Тогда множество Жюлиа было бы пусто, что противоречит предыдущей лемме. □

Теорема 3.4 (теорема о транзитивности)**.** *Пусть $z_1 \in J(f)$ и N — окрестность z_1. Тогда объединение U образов $f^n(N)$ содержит все множество Жюлиа и содержит все $\hat{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, двух точек. Более точно, если N достаточно мало, то $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$.*

Доказательство. То, что в дополнении к U не может быть более трех точек, следует из теоремы Монтеля (иначе $z_1 \in U \subset F$). Если $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus U$, то $f^{-1}(z) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus U$. Следовательно, z периодическая и $z \in \mathcal{E}(f)$. Остается заметить, что если вначале взять $N \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$, то $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$. □

Следствие 3.5. *(i) Если множество Жюлиа содержит внутреннюю точку, то оно совпадает со всей сферой Римана;*
(ii) Граница бассейна притяжения A любой притягивающей периодической орбиты совпадает с множеством Жюлиа;
(iii) Каждая компонента связности множества Фату либо совпадает с некоторой компонентой связности множества A, либо не пересекается с A;
(iv) Итерированные прообразы $\{\, z \colon \exists n > 0 | f^n(z) = z_0 \,\}$ любой точки z_0 множества Жюлиа всюду плотны в J;
(v) Множество Жюлиа не имеет изолированных точек.

Доказательство. (i) Выберем окрестность точки, полностью лежащую в множестве Жюлиа. Тогда по теореме о транзитивности в множестве Жюлиа содержится $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$, а значит, в силу замкнутости J, и вся сфера Римана.
(ii) Любая точка границы лежит в множестве J, так как в любой ее окрестности есть как точки, которые стремятся к периодической, так и точки, никогда не попадающие в ее бассейн притяжения. Любая точка z множества Жюлиа лежит на границе бассейна притяжения, потому что в силу теоремы какая-то положительная итерация любой ее окрестности пересекается с бассейном притяжения, а значит, и сама окрестность с ним пересекается. С другой стороны, сама точка z не лежит в бассейне притяжения.
(iii) В противном случае F пересекалось бы с границей бассейна притяжения.
(iv) Существование такой точки множества Жюлиа, в некоторой окрестности N которой не было бы прообразов точки z_0, исключается в силу теоремы (так как $z_0 \notin \mathcal{E}(f)$).
(v) Множество Жюлиа бесконечно (иначе все точки из него имели бы конечную большую орбиту и были бы суперпритягивающими). Значит, у него есть точка плотности $z \in J \subset \hat{\mathbb{C}}$. Итерированные прообразы этой точки образуют плотное множество неизолированных точек в $J(f)$.

□