Эргодические и гиперболические рациональные отображения.

теорема Кёбе об униформизации — гиперболическая метрика — посткритическое множество — растяжение множества Жюлиа — дихотомия: эргодичность/притяжение — гиперболические рациональные отображения

В этой лекции мы продолжим изучение рациональных отображений сферы Римана в себя. Как и в прошлой лекции, будем обозначать через $\Delta = \{ z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1 \}$ единичный диск, и через $\hat{\mathbb{C}}$ — сферу Римана. Кроме того, как и в прошлой лекции, нам потребуется напомнить еще несколько фактов из комплексного анализа (за недостатком времени почти ничего не объясняя).

Часть 1. Гиперболическая метрика.

Определение 1.1. *Римановой поверхностью* называется одномерное комплексное многообразие. *Эллиптической кривой* называется риманова поверхность, представляющая собой фактор $\mathbb{C}/L$, где L — комплексная решетка (аддитивная подгруппа, порожденная двумя линейно независимыми над $\mathbb{R}$ комплексными числами).

Как немедленно следует из определения, риманова поверхность является вещественно-двумерным многообразием. Это многообразие ориентировано, так как якобиан координатной функции равен квадрату ее модуля и, следовательно, якобианы всех склеек локальных карт положительны. Эллиптическая кривая является римановой поверхностью рода 1 (тор), причем, как можно показать, любая риманова поверхность рода 1 изоморфна некоторой эллиптической кривой.

Теорема 1.2 (теорема Кёбе об униформизации). *Всякая односвязная риманова поверхность изоморфна либо $\hat{\mathbb{C}}$, либо $\mathbb{C}$, либо Δ.*

Предложение 1.3. *(i) Поверхности, универсальная накрывающая которых изоморфна $\hat{\mathbb{C}}$, изоморфны $\hat{\mathbb{C}}$. (ii) Поверхности, универсальная накрывающая которых изоморфна $\mathbb{C}$, изоморфны либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$, либо эллиптической кривой.*

Доказательство. Пусть X — риманова поверхность, $\tilde{X}$ — ее универсальная накрывающая и $G = \pi_1(X)$. Тогда G свободно и разрывно действует на $\tilde{X}$ как группа автоморфизмов, и $X \cong \tilde{X}/G$. Осталось выяснить, какие группы автоморфизмов могут действовать свободно и разрывно на $\hat{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{C}$.

Всякий автоморфизм $\hat{\mathbb{C}}$ дробно-линеен и, следовательно, имеет неподвижную точку. Значит, $G = \{ e \}$, и утверждение (i) доказано.

Всякий автоморфизм $\mathbb{C}$ имеет вид $z \mapsto az + b$. Поэтому он может не иметь неподвижной точки только при $a = 1$. Утверждение (ii) теперь следует из того, что в разрывной группе автоморфизмов $\{ z \mapsto z + b \}$ параметр b либо равен нулю, либо пробегает одномерную или двумерную решетку. Эти три случая соответствуют описанным в условии. □

Определение 1.4. Риманова поверхность называется *гиперболической*, если ее универсальная накрывающая изоморфна единичному кругу Δ.

Как следует из теоремы Кёбе, любая риманова поверхность, кроме описанных в предложении 1.3, является гиперболической. На гиперболических поверхностях определена риманова метрика, опущенная из гиперболической метрики на Δ с помощью универсального накрытия. Эта метрика называется *гиперболической*, или *метрикой Пуанкаре*.

Замечание 1.5. К сожалению, термин "гиперболический" имеет несколько значений даже в пределах этой лекции (здесь термин упомянут в связи с гиперболической геометрией). Во избежание путаницы, в этом контексте мы будем иногда говорить о "конформной гиперболичности".

Перечислим (без доказательства) некоторые свойства гиперболической метрики. Они представляют собой несложные следствия леммы Шварца.

Теорема 1.6. *(i) Всякий изоморфизм гиперболических римановых поверхностей является изометрией.*
(ii) Всякое голоморфное отображение гиперболических римановых поверхностей не увеличивает расстояния и длины кривых в гиперболической метрике.
(iii) Гиперболическая метрика геодезически полна (любая геодезическая может быть неограниченно продолжена) и имеет постоянную кривизну.
(iv) Для открытых собственных подмножеств $U \subset \mathbb{C}$ гиперболическая метрика вычисляется по формуле $ds^2 = (F_U(z))^2(dx^2 + dy^2)$, где

$$F_U := \frac{1}{max|f'(0)|},$$

а максимум берется по всем таким изоморфизмам $f\colon \Delta \to U$, что $f(0) = z$.
(v) Пусть $f\colon X \to Y$ — вложение одной гиперболической поверхности в другую, и пусть $s = d(x, Y \setminus X)$ — расстояние в гиперболической метрике поверхности Y. Тогда $f'(x) \to 0$ при $s \to 0$.

Примеры 1.7. (1) В единичном диске Δ: $ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$.
(2) В верхней полуплоскости H: $ds = \frac{|dz|}{2\,\mathrm{Im}(z)}$.
(3) В проколотом единичном диске Δ^*: $ds = \frac{|dz|}{2|z|\log(\frac{1}{|z|})}$.

Часть 2. Посткритическое множество.

Определение 2.1. *Посткритическим множеством $P(f)$* отображения f называется замыкание объединения положительных полуорбит $\{\, f^n(c), n > 0 \,\}$ всех критических точек c.

Основная идея рассмотрения посткритического множества заключается в том, что отображение f растягивает гиперболическую метрику на $\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$. Это, конечно, имеет смысл только если $P(f)$ не совпадает со всей сферой Римана. Кроме того, для существования гиперболической метрики необходимо, чтобы $P(f)$ содержало хотя бы три элемента; как показывает следующая лемма, содержательные случаи этим исчерпываются.

Лемма 2.2. *Пусть f — рациональное отображение степени $d \geqslant 2$. Если $P(f)$ содержит не более двух элементов, то f сопряжено с отображением $z \mapsto z^{\pm d}$, и его множество Жюлиа представляет собой единичную окружность.*

Доказательство. Переведем дробно-линейным отображением точки множества $P(f)$ в множество $\{\,0, \infty\,\}$. Остальное составляет содержание упражнения 3 к предыдущей лекции. □

Предложение 2.3. *Пусть f — рациональное отображение степени $d \geqslant 2$, и $P(f)$ содержит не менее трех элементов. Тогда если $x \in \hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$, то $\|f'(x)\| \geqslant 1$ по отношению к гиперболической метрике на $\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$.*

Доказательство. Пусть $Q_1(f) = f^{-1}(P(f))$. Тогда

$$f\colon \hat{\mathbb{C}} \setminus Q_1(f) \to \hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$$

— локально конформное отображение, а значит, голоморфное накрытие. Поэтому f является изометрией гиперболических метрик области определения и области значения. Поскольку $P(f) \subset Q_1(f)$, то $(\hat{\mathbb{C}} \setminus Q_1(f)) \subset (\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f))$, и утверждение следует из пункта (ii) теоремы 1.6. □

Теорема 2.4 (растяжение множества Жюлиа)**.** *Пусть f — рациональное отображение степени $d \geqslant 2$, и $P(f)$ содержит не менее трех элементов. Тогда для любой точки $x \in J(f)$, положительная полуорбита которой не пересекается с посткритическим множеством, $\|(f^n)'(x)\| \to \infty$ по отношению к гиперболической метрике на $\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$.*

Доказательство. Пусть $Q_n(f) = f^{-n}(P(f))$. Тогда Q_n — возрастающая последовательность компактов. Пусть $\bar{Q}$ — замыкание ее объединения $Q = \cup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$. Докажем сперва, что $J(f) \subset \bar{Q}$. Для этого рассмотрим произвольную точку $z \in J(f)$. По теореме о транзитивности, объединение V образов любой ее окрестности $U \ni z$ содержит всю сферу Римана $\hat{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, двух точек (с конечной большой орбитой). Значит, V пересекается с $P(f)$. Значит, U пересекается с Q. Поскольку произвольная окрестность U точки z пересекается с Q, $z \in \bar{Q}$.

Отсюда сферическое расстояние между Q_n и x стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда и расстояние от x до Q_n в гиперболической метрике $\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$ стремится к нулю. Значит, согласно пункту (v) теоремы 1.6, для вложения

$$i_n\colon (\hat{\mathbb{C}} \setminus Q_n(f)) \to (\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f))$$

выполнено $\|i_n'(x)\| \to 0$ (по отношению к метрикам Пуанкаре образа и прообраза). Значит, отображение $f^n \circ i_n^{-1}$ неограниченно растягивает метрику Пуанкаре на $\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$ с ростом n. □

Следствие 2.5. *Посткритическое множество содержит притягивающие периодические точки, а также все нейтральные периодические точки, лежащие в множестве Жюлиа (в частности, параболические).*

Доказательство. Если $|P(f)| = 2$, то отображение сопряжено с отображением вида $z \mapsto z^d$, и утверждение очевидно. Если $f^p(x) = x$ и x — притягивающая, то она лежит в $P(f)$ по предложению 2.3. Если x нейтральная и $x \in J(f)$, то $x \in P(f)$ по теореме 2.4. □

Часть 3. Эргодические рациональные отображения.

Определение 3.1. Отображение f с конечной инвариантной мерой μ называется *эргодическим*, если любое вполне инвариантное множество имеет полную или нулевую меру.

Однако рациональные отображения сферы Римана $\hat{\mathbb{C}}$ обычно называются эргодическими, если упомянутое выше свойство выполняется для (не обязательно инвариантной) меры площади на $\hat{\mathbb{C}}$.

Теорема 3.2. *Пусть f — рациональное отображение степени $d \geqslant 2$. Тогда либо $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$ и отображение f эргодично, либо для почти всех (по мере площади) $x \in J(f)$ сферическое расстояние $d(f^n(x), P(f))$ стремится к нулю при $n \to \infty$.*

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 3.3. *Пусть $V \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$ — открытое связное множество, а U — компонента связности $f^{-n}(V)$. Тогда $f^n\colon U \to V$ — накрытие. В частности, если V односвязно, то найдется унивалентная ветвь f^{-n}, отображающая V в U.*

Доказательство. Критические точки отображения f^n лежат в множестве $P(f)$. Значит, $f^n\colon U \to V$ — локальный гомеоморфизм, и, следовательно, накрытие. Если V односвязно, то накрытие тривиально. □

Доказательство теоремы 3.2. Будем предполагать, что посткритическое множество содержит хотя бы три точки (в противном случае, по лемме 2.2, $J(f)$ — окружность, и имеет нулевую площадь).

Пусть найдется подмножество $E \subset J(f)$ положительной площади, для каждого x из которого

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(f^n(x), P(f)) \geqslant \varepsilon > 0.$$

Мы докажем, что любое замкнутое f-инвариантное множество $F \subset J(f)$, пересекающее E по множеству положительной меры, совпадает с $\hat{\mathbb{C}}$. Это будет означать, что выполнен первый случай.

Пусть $K = \{\, z\colon d(z, P(f)) \geqslant \varepsilon \,\}$, и пусть x — точка плотности $E \cap F$. Согласно предположению, найдутся такие $n_k \to \infty$, что $y_k = f^{n_k}(x) \in K$.

Рассмотрим шары в сферической метрике: $B_k = B(y_k, \varepsilon/2)$. Согласно лемме 3.3, на B_k найдется унивалентная ветвь g_k отображения f^{n_k}, такая что $g_k(y_k) = x$. Более того, g_k может быть продолжено до унивалентной функции на большем шаре $B(y_k, \varepsilon)$. Поэтому по теореме Кёбе об искажениях производная g_k на B_k ограничена, и площадь области $C_k = g_k(B_k)$ сравнима с площадью круга с тем же диаметром.

По теореме 2.4 о растяжении множества Жюлиа, $\|(f^{n_k})'(x)\| \to \infty$ по отношению к гиперболической метрике на $\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$. Поскольку K — компакт, то же верно и по отношению к сферической метрике. Поэтому "сферический" диаметр C_k стремится к нулю. Так как x — точка плотности, $\frac{area(F \cap C_k)}{area(C_k)} \to 1$. Так как F f-инвариантно, $\frac{area(F \cap B_k)}{area(B_k)} \to 1$.

Размеры шаров B_k постоянны, поэтому в силу компактности $\hat{\mathbb{C}}$ можно найти такой шар B, в котором плотность F единичная. В силу замкнутости множества Жюлиа, мы получаем, что оно содержит внутреннюю точку, и, следовательно $F = J(f) = \hat{\mathbb{C}}$ (по первому следствию из теоремы о транзитивности). $\square$

Часть 4. Гиперболические рациональные отображения.

В этом разделе мы дадим несколько определений гиперболических рациональных отображений, и с помощью теоремы об эргодичности докажем, что множество Жюлиа такого отображения имеет меру 0.

Теорема 4.1. *Пусть f — рациональное отображение степени $d \geqslant 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *посткритическое множество $P(f)$ не пересекается с множеством Жюлиа $J(f)$;*
(2) *множество Жюлиа не содержит критических точек и параболических циклов;*
(3) *каждая критическая точка отображения f стремится к притягивающему циклу под действием отображения f;*
(4) *существует гладкая конформная метрика ρ, определенная в окрестности $J(f)$, такая что $\|f'(z)\|_\rho > C > 1$ при всех $z \in J(f)$;*
(5) *найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что f^n строго растягивает сферическую метрику в ограничении на множество Жюлиа.*

Определение 4.2. Рациональное отображение называется *гиперболическим*, или *удовлетворяющим аксиоме A*, если выполнено любое из (эквивалентных) условий теоремы.

Доказательство. Если $|P(f)| = 2$, то все условия выполнены (упр. 4). Поэтому будем полагать $|P(f)| > 2$.

Если $P(f) \cap J(f) = \emptyset$, то множество Жюлиа не содержит критических точек и параболических циклов в силу своей f-инвариантности и следствия 2.5 соответственно, поэтому (1) влечет (2). Далее, (2) влечет (3) по теореме о классификации связных компонент множества Фату, которую мы обсудим в одной из следующих лекций. (3) влечет $P(f) \subset F(f)$ и, следовательно, условие (1).

Условие (3) означает, что $P(f)$ и $Q(f) = f^{-1}(P(f))$ имеют конечное множество предельных точек, а сами счетны. Значит, $\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$ и $\hat{\mathbb{C}} \setminus Q(f)$ связны, и

$$f\colon \hat{\mathbb{C}} \setminus Q(f) \to \hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$$

— накрытие и изометрия в смысле соответствующих гиперболических метрик. Поскольку $|P(f)| > 2$, множество $Q(f) \setminus P(f)$ непусто, поэтому вложение

$$i\colon \hat{\mathbb{C}} \setminus Q(f) \to \hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$$

сжимает в гиперболической метрике для всех $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus Q(f)$. Поэтому f растягивает в гиперболической метрике $\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$, причем на множестве Жюлиа $J(f)$ — строго растягивает (силу компактности $J(f)$ в $\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$). Отсюда (3) влечет (4). Очевидно, (4) влечет (5), поскольку в окрестности множества Жюлиа любые две конформные метрики квазиизометричны, а значит при достаточно большом n растяжение f^n в гиперболической метрике $\hat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$ превзойдет константу квазиизометричности и окажется растягивающим и в стандартной метрике на сфере. Осталось заметить, что (5) влечет (2). $\square$

Следствие 4.3. *Множество Жюлиа гиперболического рационального отображения имеет меру* 0.

Доказательство. $J(f) \neq \hat{\mathbb{C}}$ в силу условия (2). Значит, по теореме 3.2 $J(f)$ не может иметь положительную меру, ведь тогда часть множества Жюлиа притягивалась бы к посткритическому множеству и в силу замкнутости пересекалась бы с ним, что противоречит условию (1). $\square$