Множество Мандельброта

определение множества Мандельброта — характеризация параметров квадратичного семейства — компоненты множества Мандельброта и бифуркации удвоения периода

В этой лекции мы вернемся к квадратичному семейству $f_c(z) := z^2 + c$, в котором происходит каскад бифуркаций удвоения периода, и применим к нему технику предыдущих двух лекций, рассматривая его как отображение сферы Римана $\hat{\mathbb{C}}$ в себя а c — как комплексный параметр.

Часть 1. Множество Мандельброта

Начнем с еще одного следствия из теоремы о растяжении множества Жюлиа.

Предложение 1.1. *Число притягивающих периодических точек рационального отображения* $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *не превосходит* $\deg P + \deg Q$.

Доказательство. Посткритическое множество содержит все притягивающие периодические точки. Значит, каждая притягивающая периодическая точка притягивает некоторую критическую. Количество критических точек в $\mathbb{C}$ не превосходит числа решений уравнения $g'(z) = 0$, то есть $\deg P + \deg Q - 1$; значит, их число в $\hat{\mathbb{C}}$ не больше $\deg P + \deg Q$. □

Квадратичное отображение f_c имеет две критические точки 0 и ∞ (последняя — неподвижная и суперпритягивающая).

Определение 1.2. *Множеством Мандельброта* $M \supset \mathbb{C}$ называется множество таких параметров c, что критическая точка 0 отображения f_c не принадлежит бассейну притяжения бесконечности.

Эквивалентным условием (эквивалентность определений мы докажем в следующей лекции) является связность множества Жюлиа.

Предложение 1.3 (характеризация параметров квадратичного семейства)**.** *Для каждого отображения из квадратичного семейства* f_c *выполнен ровно один из следующих случаев:*

(1) *Нуль принадлежит бассейну притяжения бесконечности. Имеется лишь одна область притяжения. Множество Жюлиа состоит из несчетного числа компонент связности.*
(2) *Существует притягивающая периодическая точка, отличная от бесконечности, которая притягивает нуль. Множество Жюлиа связно и является границей двух областей притяжения.*
(3) *Нуль лежит в множестве Жюлиа.*

Множества параметров c*, соответствующие первым двум случаям, открыты. Множество Мандельброта* M *замкнуто и является дополнением до первого из них. Отображение* f_c *гиперболично в первых двух случаях и негиперболично в третьем.*

Доказательство. Согласно предыдущему предложению, у отображения имеется не более двух периодических притягивающих орбит. Одна из них — ∞.

1. Если обе критические точки к ней притягиваются, то второй притягивающей орбиты нет. Тогда параметр c не лежит в множестве Мандельброта, и множество Жюлиа несвязно в силу второго определения множества M. Докажем тогда, что оно имеет несчетное количество компонент связности. Действительно, пусть $J = J_0 \cup J_1$, где J_i — непересекающиеся непустые компактные подмножества. Тогда они оба бесконечны, так как множество Жюлиа не имеет изолированных точек. Докажем, что J_0 не является связным. Действительно, выберем открытое множество U, которое пересекает J_0, но не пересекает J_1. Тогда по теореме о транзитивности, некоторый его образ $f^n(U)$ должен пересекать оба множества, иначе U лежало бы в множестве Фату по теореме Монтеля. Но тогда, в силу инвариантности множества Жюлиа, $f^n(J_0)$ пересекает оба множества. Поэтому J_0 может быть представлено в виде объединения непустых компактных подмножеств

$J_{00} = J_0 \cap f^{-n}(J_0)$ и $J_{01} = J_0 \cap f^{-n}(J_1)$. Аналогичным образом строятся непустые компактные подмножества $J_{t_1 t_2 \dots t_n}$ для любой последовательности (t_k) нулей и единиц. Каждое их бесконечное пересечение, соответствующее бесконечной последовательности нулей и единиц, не пересекается с остальными, непусто и содержит по меньшей мере одну компоненту связности.

2. Если нуль притягивается к другой периодической орбите, то множество Жюлиа связно в силу эквивалентности определений и является границей притяжения двух точек согласно пункту (ii) следствия теоремы о транзитивности (лекция 4).

3. Пусть нуль не притягивается ни к одной из периодических точек. Если бы он не лежал в множестве Жюлиа, то посткритическое множество не пересекалось бы с множеством Жюлиа, и отображение было бы гиперболичным. Это противоречит бы тому, что каждая критическая точка гиперболического отображения стремится к притягивающему циклу.

Оставшиеся утверждения очевидны. □

Часть 2. Компоненты множества Мандельброта и бифуркации удвоения периода

Компоненты, которые видны на изображении множества Мандельброта (см. рисунок на лекции или картинку из интернета), соответствуют второму случаю предложения 1.3. В частности, самая большая область множества Мандельброта представляет собой множество тех значений параметра, для которых есть устойчивая периодическая орбита периода 1 (неподвижная точка).

Предложение 2.1. *Граница области значений параметра c, для которых нуль притягивается к устойчивой неподвижной точке под действием отображения f_c, представляет собой кардиоиду — кривую, которую прочерчивает фиксированная точка окружности, катящаяся по неподвижной окружности того же радиуса.*

Доказательство. В этом случае обе окружности имеют радиус 1/4, и неподвижная имеет центр в точке 0.

Действительно, если отображение имеет неподвижную притягивающую точку, то $c = \frac{b(2-b)}{4}$ для некоторого $b \in \Delta$ (b — мультипликатор в неподвижной точке). Граница задается той же формулой для b из единичной окружности. Если перейти в систему координат, в которой вторая окружность вращается на месте, то ее точка задается формулой $c' = \frac{2-b}{4}$. Отсюда $c = \frac{b(2-b)}{4}$. □

Круги на множестве Мандельброта соответствуют притягиванию нуля к периодическим орбитам больших периодов (см. также задачи экзамена).

Из доказательства предложения видно, что самая левая точка кардиоиды соответствует мультипликатору -1, и в этой точке для вещественного отображения f_c происходит бифуркация удвоения периода. Круги из множества Мандельброта, пересекающие вещественную ось, соответствуют наличию периодических орбит периода 2^k, и отношение радиусов соседних кругов стремится к δ (константа Фейгенбаума).