По направлению к паззлам

эквивалентность определений множества Мандельброта — заполненное множество Жюлиа — внешние лучи — разбиение на компоненты связности

Часть 1. Эквивалентность определений множества Мандельброта

Напомним, $f_c(z) = z^2 + c$, а множество Мандельброта $M \subset \mathbb{C}$ — это совокупность таких параметров c, что критическая точка 0 отображения f_c не принадлежит бассейну притяжения бесконечности. Мы начнем с обещанного доказательства эквивалентности определений множества Мандельброта. Доказательство это, преследующее свою внутреннюю цель, будет, кроме того, иллюстрировать основные методы последующих расссуждений лекции.

Теорема 1.1. *Множество Жюлиа отображения f_c связно тогда и только тогда, когда $c \in M$.*

Докажем сперва следующее утверждение (которое мы применим к отображениям f_c).

Лемма 1.2. *Бассейн притяжения бесконечности любого полиномиального отображения связен.*

Доказательство. Бассейн притяжения бесконечности полиномиального отображения g содержит некоторый шар $V = \{ z \colon |z| > R \}$ (с центром в бесконечности) и представляет собой объединение

$$\cup_{n=0}^{\infty} g^{-n}(V)$$

его итерационных прообразов. Мы будем полагать, что $g^{-1}(V) \supset V$, что выполнено, если R достаточно велико. Тогда итерационные прообразы V вложены друг в друга. Для связности бассейна притяжения бесконечности достаточно доказать связность каждого из них. Докажем это утверждение по индукции.

База индукции: V связно.

Шаг индукции: поскольку отображение g полиномиально, прообраз $g^{-(n+1)}(V)$ множества $g^{-n}(V)$ состоит не более чем из k компонент связности, где k — степень многочлена, задающего g. Каждая из компонент пересекается с V, а их объединение содержит V. Значит, область $g^{-(n+1)}(V)$ связна. □

Лемма 1.3. *Если $c \in M$, то бассейн притяжения бесконечности отображения f_c односвязен.*

Доказательство. Рассмотрим униформизующую карту в проколотой окрестности бесконечности, которая не содержит орбиты нуля и в которой отображение f_c записывается как $z \mapsto z^2$ (ее существование гарантирует *теорема Бётхера*). Так как она (проколотая окрестность) не содержит орбит критических точек, эта карта продолжается на весь бассейн притяжения бесконечности. Значит, бассейн притяжения бесконечности без самой точки ∞ конформно эквивалентен проколотому диску. Добавляя к нему точку ∞, получаем, что он односвязен. □

Доказательство теоремы 1.1. Согласно предыдущим леммам, если $c \in M$, то бассейн притяжения бесконечности связен и односвязен. Значит, его граница связна. Но, как нам известно (следствие 3.5(ii), лекция 4), граница бассейна притяжения любой притягивающей орбиты рационального отображения совпадает с множеством Жюлиа.

Докажем обратное включение. Пусть множество Жюлиа связно. Тогда бассейн притяжения бесконечности односвязен (иначе бы окрестность нестягиваемой петли в этом бассейне разделяла бы его границу на две компоненты связности).

Из лекции 4 мы знаем, что множество Жюлиа бесконечно. Тогда бассейн притяжения бесконечности, который с ним не пересекается, не содержит трех точек и по теореме Римана конформно эквивалентен с помощью некоторого отображения h единичному диску Δ (в ограничении на которое действует $g = h \circ f \circ h^{-1}$).

Пусть ноль лежит в бассейне притяжения бесконечности, и пусть $a = h(\infty)$, $b = h(0)$. Рассмотрим $c = g(b)$ и путь γ, соединяющий a и c и не проходящий через b. Так как a и b — единственные критические точки отображения g, а a и c — их образы, то у всех точек пути γ, кроме его концов, будет по два прообраза при отображении g [1]. Значит, прообраз γ представляет собой замкнутую непересекающуюся кривую. Тогда образ ее внутренности переходит в область, ограниченную кривой γ, а она не ограничивает никакой области. Противоречие. □

Часть 2. Внешние лучи

Как мы убедились при доказательстве теоремы 1.1, если орбита нуля ограничена, то бассейн притяжения бесконечности конформным преобразованием можно отождествить в единичным диском (или же с его открытой внешностью в $\hat{\mathbb{C}}$). Оказывается, структура этого отображения играет важную роль при анализе множества Жюлиа.

Определение 2.1. Пусть $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ — многочлен степени $d \geqslant 2$ с суперпритягивающей неподвижной точкой ∞. *Заполненным множеством Жюлиа* отображения f называется дополнение $\hat{\mathbb{C}} \setminus A_\infty$, где A_∞ — бассейн притяжения бесконечности.

Как следует из определения, заполненное множество Жюлиа компактно, его граница совпадает с множеством Жюлиа, а само оно связно, если только связно множество Жюлиа.

Пусть теперь K — компактное заполненное (то есть со связным дополнением) связное множество мощности больше 1 (и, следовательно, континуальное). Примером такого множества может служить заполненное множество Жюлиа для отображения из квадратичного семейства с параметром, лежащим в множестве Мандельброта. По теореме Римана об отображении, существует единственный конформный изоморфизм $\phi\colon \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta} \to \mathbb{C} \setminus K$, такой что $\phi(z)/z \to \lambda > 0$ при $z \to \infty$.

Для каждого угла $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ определим *внешний луч* $R_t \subset \mathbb{C}$ как

$$R_t = \{\, \phi(r \exp(2\pi i t))\colon 1 < r < \infty \,\}.$$

Мы будем говорить, что внешний луч *заканчивается в точке* x, если

$$\lim_{r \to 1+} \phi(r \exp(2\pi i t)) = x.$$

Таким образом, если луч заканчивается в x, то, автоматически, $x \in J(f)$.

Предложение 2.2. *Почти все лучи заканчиваются.*

Доказательство. Пусть $A = \{\, z\colon 1 < |z| < 2 \,\}$. Тогда, по неравенству Коши-Буняковского,

$$\left(\int_A |\phi'(z)||dz|^2\right)^2 \leqslant \left(\int_A 1|dz|^2\right) \cdot \left(\int_A |\phi'(z)|^2|dz|^2\right) = area(A) \cdot area(\phi(A)) < \infty.$$

Значит, интеграл $\int_1^2 |\phi'(r\exp(2\pi i t))|dr$ конечен при почти любом t. Значит, "хвосты" почти всех внешних лучей имеют конечную длину, откуда и следует требуемое. □

Приведем без доказательства следующие два классических комплексно-аналитических результата (первый из них принадлежит Ф. и М. Риссам, а второй — Линделёфу).

Теорема 2.3. *Для любого множества положительной меры на окружности есть два внешних луча, соответствующих точкам этого множества, концы которых различны.*

Иначе говоря, отображение концов лучей не является постоянным ни на каком множестве положительной меры.

Теорема 2.4. *Пусть $\phi(z) \to x \in \partial K$ если $z \to \exp(2\pi i t)$ вдоль какой-то кривой. Тогда x является концом луча R_t.*

[1] нарисуйте рисунок, или посмотрите его на лекции

Определение 2.5. Точка $x \in \partial K$ называется *достижимой*, если она является пределом образов какой-то гладкой кривой из $\mathbb{C} \setminus \bar{\{}\,\Delta\,\}$.

Из теорем 2.4 и 2.5 следует предложение:

Предложение 2.6. *(i) Точка $x \in \partial K$ достижима, если и только если она является концом какого-то луча.*
(ii) Если δ — путь в $\mathbb{C} \setminus K$, стремящийся к $x \in \partial K$, то $\gamma = \phi^{-1} \circ \delta$ стремится к точке $\exp(2\pi i t)$.
(iii) Множество концевых точек лучей плотно в ∂K.

Теорема 2.7. *Пусть $n > 1$. В точку x приходят n лучей тогда и только тогда, когда x разбивает K на n компонент связности.*

Доказательство. Ясно, что если в точку x приходят n лучей, то x разбивает K как минимум на n компонент связности. Поэтому нам осталось показать, что если x разбивает K на n компонент связности, то в точку x приходят по меньшей мере n лучей.

Предположим, что $n = 2$ (случай произвольного n лишь немногим более громоздкий в описании рассуждения). Тогда $K \setminus \{\,x\,\} = A \cup B$, где A и B замкнуты в $\mathbb{C} \setminus \{\,x\,\}$ и не пересекаются. Рассмотрим гладкую функцию $\alpha\colon \mathbb{C} \setminus \{\,x\,\} \to [0, 1]$, для которой $\alpha^{-1}(0) = A$ и $\alpha^{-1}(1) = B$. Такая непрерывная функция существует по теореме Титце о продолжении, и несложно видеть, что ее можно сделать и гладкой. Тогда, взяв ее регулярное значение $r \in (0, 1)$, получим одномерное вложенное подмногообразие $F = \alpha^{-1}(r)$ в $\mathbb{C} \setminus \{\,x\,\}$.

Соединим A и B кривой γ, внутренние точки которой лежат в $\mathbb{C} \setminus K$. Тогда эта кривая разделяет $\mathbb{C} \setminus K$ на две части, одна из которых (назовем ее U) ограничена. Если бы все компоненты $F \cap \bar{U}$ были бы компактными, кривую γ можно было бы провести не пересекая F, что противоречило бы теореме о промежуточном значении для функции α. Поэтому у $F \cap \bar{U}$ есть компонента F_1, диффеоморфная $[0, \infty]$. В силу ограниченности U, ей ничего не остается кроме как сделать точку x достижимой, а следовательно, и концевой для какого-то луча R_{t_1}.

Для доказательства существования второго луча, отличного от первого, остается заметить, что R_{t_1} не разбивает плокость на две части, поэтому A и B можно соединить другой кривой γ' с теми же свойствами, но не пересекающей R_{t_1}, и привести те же аргументы. $\square$