Ренормализация.

ПОЛИНОМИАЛЬНО-ПОДОБНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ — КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ — ТЕОРЕМА О ВЫПРЯМЛЕНИИ — ПЛОТНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК В МНОЖЕСТВЕ ЖЮЛИА

Часть 1. Полиномиально-подобные отображения

Для того, чтобы было удобно распространить различные свойства полиномиальных отображений на более широкий класс функций, Дуади и Хаббардом был введен термин полиномиально-подобных отображений (polynomial-like maps). Мы опишем их основные свойства, не приводя доказательств.

Определение 1.1. Голоморфное отображение $f\colon U \to V$ открытых дисков U, V называется *собственным*, если прообраз любого компактного множества компактен [1]. В этом случае прообраз каждой точки конечен; его мощность (посчитанная с учетом кратностей) называется *степенью* собственного отображения и обозначается $\deg f$.

Рассмотрим многочлен $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ степени $d > 1$. Каждая точка имеет d прообразов с учетом кратностей. Диск $V = \{\, z\colon |z| < R \,\}$ достаточно большого радиуса содержит свой прообраз $U = f^{-1}(V)$, и его замыкание компактно в V. Напомним, заполненное множество Жюлиа состоит из всех точек, положительные полуорбиты которых ограничены, и равно $K(f) = \cap_{n>0} f^{-n}(V)$.

Эти соображения мотивируют следующее определение.

Определение 1.2. *Полиномиально-подобным отображением* $f\colon U \to V$ называется собственное отображение, для которого замыкание $\bar{U}$ компактно в V. *Заполненным множеством Жюлиа* полиномиально-подобного отображения называется $K(f) = \cap_{n>0} f^{-n}(V)$. *Степенью* полиномиально-подобного отображения называется максимальное число прообразов точки.

Для того, чтобы сформулировать ключевой факт про полиномиально-подобные отображения — теорему о выпрямлении — нам понадобится еще одно важное определение.

Часть 2. Квазиконформные отображения

Квазиконформные отображения являются обобщением конформных и неформально определяются как отображения, переводящее малые круги в малые эллипсы с равномерно ограниченным эксцентриситетом (в случае конформных отображений он равен нулю). Строгое определение следующее.

Определение 2.1. Гомеоморфизм $f\colon X \to Y$ между римановыми поверхностями называется *квазиконформным*, если f имеет частные производные по направлениям $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial \bar{z}$, удовлетворяющие *уравнению Бельтрами*:

$$\partial f/\partial \bar{z} = \mu(z) \cdot \partial f/\partial z,$$

где μ — измеримая функция, удовлетворяющая условию $\sup|\mu| < 1$. Функция μ называется *дилатацией*. Если $|\mu| \leqslant \frac{K-1}{K+1}$, то отображение f называется *K-квазиконформным.*

Примеры 2.2.
1. Отображения $(x, y) \mapsto (x, 2y)$ и $(x, y) \mapsto (x, y/2)$ являются 2-квазиконформными.
2. Любое 1-квазиконформное отображение конформно.
3. Композиция $g \circ f$ K_1-квазиконформного и K_2-квазиконформного отображений $K_1 K_2$-квазиконформна.
4. Если f K-квазиконформно, то f^{-1} также K-квазиконформно.

Теорема 2.3 (Ahlfors, Bers, 1960)**.** *Для любой функции μ на плоскости класса L_∞, удовлетворяющей $||\mu||_\infty < 1$, существует единственное квазиконформное отображение $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, имеющее неподвижные точки* 0 *и* 1, *такое что дилатация ϕ равна μ.*

---

[1] вообще, непрерывное отображение топологических пространств называется *собственным*, если прообраз любого компактного множества компактен

Часть 3. Теорема о выпрямлении.

Определение 3.1. Два полиномиально-подобных отображения f и g называются *гибридно эквивалентными*, если между ними существует квазиконформное сопряжение ϕ, определенное в окрестности их заполненных множеств Жюлиа $K(f)$ и $K(g)$, такое что $\bar{\partial}\phi = 0$ на $K(f)$.

Замечание 3.2. Термин, по всей видимости, происходит от того, что отображения f и g "больше чем квазиконформно эквивалентны", но при этом "меньше, чем конформно эквивалентны".

Теорема 3.3 (Douady, Hubbard, 1985)**.** *Любое полиномиально-подобное отображение f гибридно эквивалентно полиномиальному (точнее, его ограничению на подходящий круг) отображению g той же степени. Если при этом $K(f)$ связно, то многочлен g определен однозначно с точностью до аффинного сопряжения.*

Теорема о выпрямлении позволяет переносить различные свойства полиномиальных отображений на полиномиально-подобные. Вот пример такого рода.

Следствие 3.4. *Периодические точки полиномиально-подобного отображения степени $d > 1$ плотны в множестве Жюлиа.*

Доказательство. По теореме о выпрямлении, утверждение немедленно следует из соответствующего факта для многочленов (см. ниже). □

Часть 4. Плотность периодических точек в множестве Жюлиа.

Теорема 4.1 (Fatou, Julia, 1985)**.** *Периодические точки рационального отображения степени $d > 1$ плотны в множестве Жюлиа.*

Доказательство. Пусть z_0 — некоторая точка $J(f)$, не являющаяся ни критической, ни неподвижной. Мы докажем, что в любой ее окрестности есть периодическая точка; этого достаточно, потому что, согласно пункту 5 следствия из теоремы о транзитивности (лекция 4), множество Жюлиа не имеет изолированных точек, поэтому конечное число точек — критические и неподвижные — можно исключить из рассмотрения.

У точки z_0 существует d прообразов $z_1, \dots z_d$. Согласно предположению, они различны и не совпадают с z_0. По теореме об обратной функции, можно найти d голоморфных функций $\phi_j(z)$, определенных в некоторой окрестности U точки z_0 и удовлетворяющих условиям $f(\phi_j(z)) = z$ и $\phi_j(z_0) = z_j$. Докажем, что существуют такие $n \in \mathbb{N}$ и $z \in U$, что $f^n(z)$ принимает одно из трех значений: z, $\phi_1(z)$ или $\phi_2(z)$. Тогда в U будет точка периода n или $n+1$.

Проведем рассуждение от противного. Пусть такой точки z не существует ни при каком n. Тогда семейство голоморфных функций (двойных отношений)

$$g_n(z) = \frac{f^n(z) - \phi_1(z)}{f^n(z) - \phi_2(z)} \cdot \frac{z - \phi_1(z)}{z - \phi_2(z)}$$

не принимает трех значений $0, 1, \infty$, и потому нормально. Тогда и f_n образует нормальное семейство в ограничении на U, что противоречит тому, что U пересекается с множеством Жюлиа. □

Замечание 4.2. Кроме того, можно доказать (*теорема Фату*), что рациональное отображение степени больше 1 имеет конечное число притягивающих или нейтральных циклов. Поэтому, более того, в множестве Жюлиа плотны отталкивающие циклы.