Ренормализация.

ОГРАНИЧЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА ИТЕРАЦИЯМИ ОБЛАСТИ — ПРИНЦИП СВЯЗНОСТИ — ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНО-ПОДОБНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ — РЕНОРМАЛИЗАЦИЯ

В этой лекции мы вернемся к понятию ренормализации, о котором мы говорили в лекции 3. Ренормализация является мощным инструментом изучения системы, свойства которой повторяются при перемасштабировнии. На этой лекции мы снова применим ее к изучению отображений из квадратичного семейства, на этот раз комплексного. Суть метода, напомним, заключается в переходе к рассмотрению отображения f^n в некоторой (меньшей) окрестности критической точки.

Сперва докажем два полезных утверждения, одно из которых описывает свойства множества Жюлиа отображения f^n, а другое — пересечения полиномиально-подобных отображений.

Часть 1. Принцип связности

Теорема 1.1 (принцип связности). *Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — многочлен со связным заполненным множеством Жюлиа $K(f)$, а $f^n\colon U \to V$ — полиномиально-подобное отображение со связным заполненным множеством Жюлиа K_n. Тогда:*

(1) *множество Жюлиа отображения $f^n\colon U \to V$ содержится в множестве Жюлиа $J(f)$;*
(2) *для любого замкнутого связного множества $L \subset K(f)$ множество $L \cap K_n$ также связно.*

Вначале докажем следующий несложный факт, обобщающий на полиномиально-подобные отображения утверждение о том, что для отображения $f\colon z \mapsto z^d$ некоторый образ произвольно выбранной дуги $U \subset S^1 = J(f)$ содержит все множество Жюлиа.

Пусть K — компактное заполненное (то есть со связным дополнением) связное континуальное множество. *Секущей кривой* для K мы будем называть замкнутую дугу, внутренность которой лежит в $\mathbb{C} \setminus K$, а концы — на ∂K.

Лемма 1.2. *Пусть f — многочлен степени d со связным заполненным множеством Жюлиа $K(f)$, а γ — его секущая кривая, соединяющая две различные точки ∂K. Тогда если U — ограниченная связная компонента $\mathbb{C} \setminus (K \cap \gamma)$, то найдется такое натуральное n, что $J(f)$ содержится в ограниченной компоненте $\mathbb{C} \setminus f^n(U)$*

Доказательство. Рассмотрим, как и в лекции 7, существующий по теореме Римана об отображении конформный изоморфизм $\phi\colon \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta} \to \mathbb{C} \setminus K$, нормализованный соотношением $\phi(z)/z \to \lambda > 0$ при $z \to \infty$. Поскольку γ соединяет различные точки на ∂K, то $\delta = \phi^{-1}(\gamma)$ также соединяет различные точки на $S^1 = \partial\Delta$ согласно предложению 2.6 лекции 7. Пусть $V = \phi^{-1}(U)$. Тогда замыкание $Cl(V)$ содержит некоторую дугу на S^1, а значит, $S^1 \subset Cl(F^n(V))$, где $F(z) = z^d$. Поскольку $F^n(V)$ открыто, оно содержит гладкую кривую, отделяющую S^1 от бесконечности, поэтому и $f^n(U)$ отделяет J от бесконечности. □

Доказательство теоремы 1.1. Первое утверждение следует из плотности периодических отталкивающих точек в множестве Жюлиа полиномиально-подобного отображения степени $d > 1$ (см. предыдущую лекцию).

Докажем от противного второе утверждение. Пусть $L \cap K_n$ несвязно. Тогда найдется такая ограниченная компонента W множества $\mathbb{C} \setminus (L \cap K_n)$, что $L \cap \partial W$ — подмножество ∂W, не совпадающее с ним самим. Тогда можно построить кривую $\gamma \subset Cl(W)$, являющуюся секущей для K_n и имеющую различные концевые точки. Более того, кривую γ можно выбрать сколь угодно близко к K_n.

По теореме Дуади–Хаббарда, f^n топологически сопряжено многочлену степени d в окрестности K_n. Согласно доказанной лемме, область U, ограниченная γ и K_n, спусят некоторое количество итераций отображается в открытое множество, отделяющее K_n от бесконечности. Значит, K_n лежит во внутренности множества $K(f)$, так как оно полно, а $U \subset W \subset K(f)$. Но, согласно первому пункту, $\partial K_n \subset \partial K(f)$. Противоречие. □

Часть 2. Пересечения полиномиально-подобных отображений

Теорема 2.1. *Пусть $f_i \colon U_i \to V_i$ — полиномиально-подобные отображения степеней d_i $(i = 1, 2)$, такие что $f_1 = f_2 = f$ в ограничении на $U = U_1 \cap U_2$. Пусть U' — такая компонента U, что $U' \subset f(U') \subset V'$. Тогда:*

(1) *$f \colon U' \to V'$ — полиномиально-подобное отображение степени $d \leqslant \max(d_1, d_2)$, и $K(f) = K(f_1) \cap K(f_2) \cap U'$;*
(2) *если $d = d_1 = d_2$, то $K(f) = K(f_1) = K(f_2)$.*

Доказательство. Пусть $V = V_1 \cap V_2$. Тогда $f \colon U \to V$ — собственное отображение, так как множество $f^{-1}(E) = f_1^{-1}(E) \cap f_2^{-1}(E)$ компактно, если компактно E. Тогда отображение $f \colon U' \to V'$ — собственное, и V' можно выбрать компонентой V. Поскольку U' и V' — компоненты связности пересечений дисков в $\mathbb{C}$, то они — также диски. Кроме того, $Cl(U')$ компактно в V', так как $Cl(U)$ компактно в V.

Итак, $f \colon U' \to V'$ полиномиально-подобно. Его заполненное множество Жюлиа таково:

$$K(f) = \bigcap f^{-n}(V') = \bigcap \left[f_1^{-n}(V_1) \cap f_2^{-n}(V_2) \cap U' \right] = K(f_1) \cap K(f_2) \cap U'.$$

Неравенство $d \leqslant d_i$ следует из того, что числа прообразов точки (с учетом кратности) не может увеличиться при переходе к ограничению отображения.

Если же $d = d_i$, то $f^{-1}(x) = f_i^{-1}(x)$ при всех $x \in K(f)$. Согласно пункту (iv) следствия теоремы о транзитивности (лекция 4), итерированные прообразы любой точки множества Жюлиа плотны в множестве Жюлиа. Поэтому $\partial K(f) = J(f) = J(f_i) = \partial K(f_i)$, откуда $K(f) = K(f_i)$. □

Часть 3. Ренормализация

Определение 3.1. *Квадратично-подобным отображением* называется полиномиально-подобное отображение степени 2.

Пусть $f(z) = z^2 + c$ — квадратичное отображение со связным множеством Жюлиа (т.е. c лежит в множестве Мандельброта).

Определение 3.2. Отображение f^n называется *ренормализуемым*, если существуют такие открытые диски $U, V \subset \mathbb{C}$, что критическая точка $0 \in U$ и $f^n \colon U \to V$ — квадратично-подобное отображение. (Или, эквивалентно, если $f^{nk}(0) \in U$ при всех $k > 0$.) Выбор пары U, V называется *ренормализацией*, а n — *уровнем* ренормализации.

Множество всех возможных уровней ренормализации мы будем обозначать $\mathcal{R}(f)$.

Теорема 3.3 (единственность ренормализации)**.** *Все ренормализации отображения f^n имеют одно и то же заполненное множество Жюлиа.*

Доказательство. Пусть $f^n \colon U_1 \to V_1$ и $f^n \colon U_2 \to V_2$ — две ренормализации отображения f^n, имеющие заполненные множества Жюлиа K_1 и K_2 соответственно. Согласно принципу связности (теорема 1.1), множество $K = K_1 \cap K_2$ связно. Очевидно, $f^n(K) = K$.

Пусть U — связная компонента множества $U_1 \cap U_2$, содержащая K, и пусть $V = f^n(U)$. По первому пункту теоремы 2.1, отображение $f^n \colon U \to V$ полиномиально-подобное, с заполненным множеством Жюлиа K, и имеющее степень 2 (потому что критическая точка 0 лежит в U). Поскольку степени всех трех отображений одинаковы, $K = K_1 = K_2$ по второму пункту теоремы 2.1. □

Список обозначений. Выберем $n \in \mathcal{R}$ и ренормализацию $f^n \colon U_n \to V_n$.

(1) P_n, J_n и K_n обозначают соответственно посткритическое множество без точки ∞, множество Жюлиа и заполненное множество Жюлиа квадратично-подобного отображения $f^n \colon U_n \to V_n$. Поскольку J связно, $P_n \subset K_n$.

(2) $K_n(i) := f^i(K_n)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, обозначают *малые заполненные множества Жюлиа.* Они переставляются по кругу под действием отображения f, и $K_n(n) = K_n$.
(3) $P_n(i) := P(f) \cap K_n(i)$ — *малые посткритические множества.*
(4) $J_n(i) := \partial K_n(i)$ — *малые множества Жюлиа.*
(5) $\mathcal{K}_n := K_n(1) \cup \cdots \cup K_n(n)$ — объединение малых заполненных множеств Жюлиа. Оно вполне инвариантно относительно f.
(6) $\mathcal{J}_n := J_n(1) \cup \cdots \cup J_n(n)$.
(7) $V_n(i) := f^i(U_n)$, и

$$U_n \xrightarrow{f} V_n(1) \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} V_n(n) = V_n.$$

В этой цепочке первое отображение — собственное степени 2, а остальные — унивалентные (инъективные).

Теорема 3.3 позволяет нам утверждать, что следующие все наборы множеств (кроме последнего, конечно) не зависят от выбора ренормализации.

Предложение 3.4. *Пусть отображение f^n ренормализуемо. Тогда при $i = 1, \ldots, n$ отображение*

$$f^n \colon U_n(i) \to V_n(i)$$

квадратично-подобно, с заполненным множеством Жюлиа $K_n(i)$, и голоморфно сопряжено отображению $f^n \colon U_n \to V_n$.

Доказательство. Отображение $f^{n-i} \colon V_n(i) \to V_n(n)$ унивалентно, и сопрягает $f^n \colon U_n(i) \to V_n(i)$ с квадратично-подобным $f^n \colon U_n \to V_n$. Значит, $f^n \colon U_n(i) \to V_n(i)$ квадратично-подобно. Его заполненное множество Жюлиа равно $K_n(i)$, так как $f^{n-i}(K_n(i)) = K_n$. $\square$

Продолжим изучение ренормализации. Следующий результат гласит, что малые заполненные множества Жюлиа $J_n(i)$ "почти не пересекаются".

Теорема 3.5. *Пусть пересечение двух различных малых множеств Жюлиа непусто. Тогда их пересечение состоит из единственной точки, которая, более того, является отталкивающей периодической точкой периода, делящегося на n.*

Доказательство. Пусть $J_n(i) \cap J_n(j) = E \neq \emptyset$. Тогда $f^n(E) = E$, и E связно по теореме 1.1.

Обозначим через W ту связную компоненту $U_n(i) \cap U_n(j)$, которая содержит E. Пусть $W' = f^n(W)$. Отображение $f^n \colon W \to W'$ полиномиально-подобно по теореме 2.1, и имеет степень 1, поскольку $i \neq j$. По лемме Шварца, инвариантное компактное множество состоит из единственной неподвижной отталкивающей точки отображения f^n. $\square$

Теорема 3.6 (НОК и ренормализация)**.** *Если $a, b \in \mathcal{R}(f)$ и $c = HOK(a, b)$, то $c \in \mathcal{R}(f)$. При этом $K_c = K_a \cap K_b$.*

Следствие 3.7. *Если $a, b \in \mathcal{R}(f)$ и a делит b, то $K_a \supset K_b$.*

Доказательство. Введем обозначение:

$$U_a^* = \{\, z \in U_a \colon f^{aj}(z) \in U_a;\ j = 1, \ldots, c/a - 1 \,\},$$

тогда $f^c \colon U_a^* \to V_a$ — полиномиально-подобное степени $2^{c/a}$. Введем аналогичное обозначение U_b^*.

По теореме 1.1, множество $L = K_a \cap K_b$ связно. Пусть U_c — связная компонента $U_a^* \cap U_b^*$, содержащая L, а $V_c = f^c(U_c)$. По теореме 2.1, отображение $f^c \colon U_c \to V_c$ полиномиально-подобно, с заполненным множеством Жюлиа L.

Критическая точка $z = 0$ лежит в $f^i(L) = f^i(K_a) \cap f^i(K_b)$ тогда и только тогда, когда a и b оба делят i, то есть когда i кратно c. Поэтому f^c имеет единственную критическую точку в L, и поскольку L связно, $f^c \colon U_c \to V_c$ квадратично-подобно. Отсюда $c \in \mathcal{R}(f)$ и $K_c = L = K_a \cap K_b$. $\square$