Задачи к спецкурсу "Ренормализация и универсальность Фейгенбаума", 7 февраля 2011 г.

1. Приведите пример двух векторных полей на плоскости с единственной особой точкой, которые имеют различный гладкий тип, но у которых преобразования потока за время 1 совпадают.

2. Найдите для особой точки $(0,0)$ стандартного седла на плоскости

$$\begin{cases} \dot{x} & = & x \\ \dot{y} & = & -y \end{cases}$$

собственные значения линеаризации преобразования фазового пространства за время 1.

3. Пусть $P_n(f)$ обозначает число периодических точек отображения f (не обязательно минимального) периода n, т.е. $\{\, x\colon f^n(x) = x \,\}$.
a) Вычислите $P_n(E_m)$, где E_m — линейное растягивающее отображение окружности степени $m > 0$.
b) Верно ли, что число P_n периодических точек произвольного отображения окружности степени m такое же, как у E_m?

Обозначение: $f_\lambda(x) := \lambda x(1-x)$.

4. a) При каких λ отображение f_λ переводит отрезок $[0,1]$ внутрь себя?
b) Вычислите $P_n(f_4)$.
c) Вычислите $P_n(f_3)$.
d) При каких λ из пункта a) отображение f_λ имеет периодическую точку (минимального) периода 2?

5. a) Докажите, что при $\lambda = 3$ в однопараметрическом семействе f_λ происходит бифуркация удвоения периода.
b) Докажите, что для орбит периода 2, появляющихся при $\lambda = 3$, также происходит бифуркация удвоения периода при некотором $\lambda > 3$.